Environment Canada Environnement Canada

National Hydrology Research Institute

NHRI PAPER NO. 18

Program DUBBLE — Simulation of Water Table and Piezometric Head Variation in a System of a Water Table and a Confined Aquifer Connected by a Leaky Bed

A. Vandenberg

NHRI

NATIONAL HYDROLOGY RESEARCH INSTITUTE
INLAND WATERS DIRECTORATE
OTTAWA, CANADA, 1982

© Minister of Supply and Services Canada 1982

Cat. No. En 36-511/18E

ISBN 0-662-12199-6

Contents

	Page
ABSTRACT	v
RÉSUMÉ	vi
INTRODUCTION	1
MATHEMATICAL DEVELOPMENT	2
COMPUTER PROGRAM	5
Language	5
Listing	6
Breakdown of program	6
Options	7
Structure of input data deck	7
COMPARISON OF MODEL RESULTS WITH ANALYTICAL SOLUTION AND EXAMPLE OF DATA CARD PREPARATION	11
RECHARGE FROM RAINFALL TO AN UNCONFINED AQUIFER	19
Steady state solution	20
Approximate transient solution	21
Time required to reach steady state	26
Numerical versus analytical solution	26
REFERENCES	30
APPENDIX. Program listing	31

Tables

Page

Table 1. Comparison of model results with analytical solution.... 17

Table 2. Ratios of $H'(t = 15.5)/H'(t \rightarrow \infty)$ for the five model runs, t_s = 15 days..... 30

Illustrations

Figure 1. Schematic diagram of a system comprised of a water table aquifer and a confined aquifer coupled through a resistive bed..... 2

Figure 2. Data cards required to run the test program..... 18

Figure 3. Definition sketch, water table aquifer under steady, uniform recharge..... 20

Figure 4. Time variant water table profiles of steady, uniform recharge..... 28

Figure 5. Variation of steady state water table profile with thickness of aquifer..... 29

Abstract

A computer program is documented which describes the two-dimensional finite-difference alternating direction implicit method applied to a system of two aquifers coupled by a resistive bed. One of the aquifers may be either a water table aquifer or a confined aquifer, whereas the second aquifer is confined. Flow in the aquifers is assumed horizontal, and recharge and discharge may be specified separately for each aquifer. The program is written with separate subroutines for input and output; this will facilitate adaptation to a particular requirement, as, for example, recharge or discharge varying with time. A number of applications are discussed in detail and a solved example is provided.

Résumé

On décrit un programme informatique qui applique la méthode implicite bidimensionnelle des différences finies, de direction alternante, à un système composé de deux aquifères séparés par une couche semi-perméable capacitive. L'un des aquifères peut être soit à nappe libre, soit captif, et l'autre est captif. On considère que l'écoulement dans les aquifères est horizontal, et il est possible de décrire séparément les débits entrant et sortant pour chaque aquifère. Le programme comprend des sous-programmes distincts pour l'entrée et la sortie, ce qui facilitera l'adaptation à des conditions particulières, par exemple à des débits entrant ou sortant qui varient en fonction du temps. On traite de façon détaillée d'un certain nombre d'applications et on donne un exemple résolu.

Program DUBBLE — Simulation of Water Table and Piezometric Head Variation in a System of a Water Table and a Confined Aquifer Connected by a Leaky Bed

A. Vandenberg

INTRODUCTION

In areas which are geologically little disturbed, the ground water system in the near surface strata may often be described with reasonable accuracy as a layered system of horizontal beds, the conductive beds (aquifers) alternating with resistive beds (aquitards). Flow in the aquifers can then be assumed to occur predominantly in the horizontal direction toward or away from a point or line sink or source, whereas flow in the aquitards is practically vertical if the resistance contrast between aquitard and aquifers is large.

If the potential in the aquitard is furthermore assumed to vary linearly with depth, the system of differential equations describing the flow in the aquifers can be set up independent of the potential in the aquitard, the resistance of the aquitard being sufficient to describe the transfer of water from one aquifer to another.

In this report, a numerical technique for digital simulation of two such resistance-connected aquifers is described in which it is assumed that one of the aquifers is a water table aquifer, and the other is semiconfined above and confined below (Fig. 1). In the water table aquifer, the horizontal conductivity varies in time, since it is the product of the saturated depth and the permeability. In the confined aquifer, the horizontal conductivity, i.e., the transmissivity or product of permeability and thickness, is constant. For the calculation of the

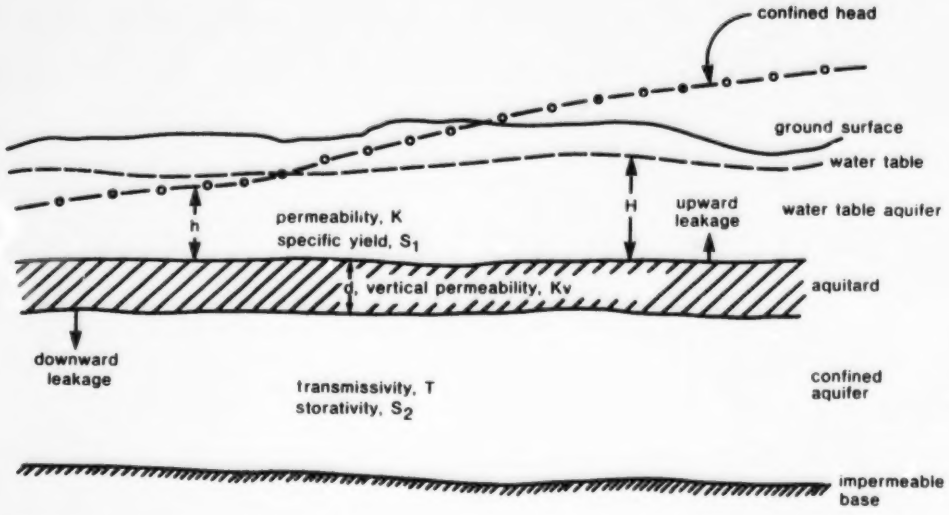

Figure 1. Schematic diagram of a system comprised of a water table aquifer and a confined aquifer coupled through a resistive bed.

piezometric head in the confined aquifer, the finite-difference alternating direction implicit procedure is used. In a previous application by Vandenberg (1974a,b; 1976), the head above the leaky bed - the aquitard - was constant, whereas in the present procedure it is replaced by the water table, and as such is variable in time. In the calculation of the water table we must recognize that the conductivity changes as the depth of the saturated zone changes and therefore this segment of the model incorporates an iterative procedure besides the alternating direction procedure.

MATHEMATICAL DEVELOPMENT

The water balance equation for an elementary parallelepiped of a confined aquifer can be expressed (Vandenberg, 1976) as

$$\partial/\partial x(T\partial h/\partial x) + \partial/\partial y(T\partial h/\partial y) + q_1 + (H-h)C = S_2 dh/dt \qquad (1)$$

where T = transmissivity = permeability x aquifer thickness (L^2/T),

h = piezometric head (L),

H = water table elevation (L); h and H are both to be measured relative to the same standard datum, which for convenience is taken as the base of the unconfined aquifer,

q_1 = recharge (positive) or discharge (negative) to or from the confined aquifer through pumpage or injection, expressed as height of water per unit of time (L/T),

C = the conductivity of the aquitard (T^{-1}); $C = K_v/d$ where

K_v = vertical permeability of aquitard (L/T) and

d = thickness of aquitard (L),

S_2 = storativity of confined aquifer (dimensionless), and

t = time.

The ADIP (alternating direction implicit procedure) for the solution of (1) has been described in detail in Vandenberg (1974a,b; 1976). For the unconfined aquifer the water balance Equation 1 takes the form

$$(\partial/\partial x)(KH\partial H/\partial x) + (\partial/\partial y)(KH\partial H/\partial y) + q_2 + (h-H)C = S_1 \partial H/\partial t \qquad (2)$$

where K = permeability of water table aquifer (L/T),

H = saturated depth of water table aquifer (L),

q_2 = recharge (positive) or discharge (negative) to or from water table aquifer through pumpage, injection, precipitation, evaporation, infiltration, etc. (L/T). Note that both q_1 and q_2 are given as flow rates per area, which is according to usage for precipitation etc.; in the case of point recnarge or discharge, however, this is contrary to usage and the standard form (cubic metres per day, for example) must be divided by the representative area, which in the finite-difference model is the area of the elementary rectangle.

S_1 = specific retention of the water table aquifer (dimensionless).

Equation 2 is nonlinear, since the term $(\partial/\partial x)(KH\partial H/\partial x)$, for example, can be written as

$$(\partial/\partial x)(KH\partial H/\partial x) = K\ \{H\partial^2 H/\partial x^2+(\partial H/\partial x)^2\}$$

In a finite-difference formulation this would mean that terms containing both H and H^2 appear in the equations. This gives no difficulties in explicit formulations, but it is troublesome in any kind of implicit formulation. Instead, in the present procedure an iterative routine is adopted. First, the saturated depth is taken at its initial level, H_t, at the beginning of the time step Δt, and a temporary value $H'_{t+\Delta t}$ is calculated for the end of the time step. Assuming that during the small time step the head may be thought of as varying linearly with time, the saturated depth is now taken as the average of H_t and $H'_{t+\Delta t}$,

and a new and better approximation of $H_{t+\Delta t}$ is calculated. When $H'_{t+\Delta t}$ changes less than a preset accuracy limit, the iteration is stopped and the procedure continues with the calculation of the piezometric head.

Strictly speaking, the piezometric head, h, occurring in the leakage term of Equation 2

$$(h-H)C$$

should also be taken as the average head during the time step, and similarly, the average water table head, H, should be used in the leakage term in Equation 1. Since the latter average is already available from the iterative portion of the routine, this feature has been used. However, calculating the average of h over the time step would involve an extra storage array and iterative adjustment of both H and h; it was felt that such refinement would not be warranted, considering the associated increase in computer cost.

COMPUTER PROGRAM

Language

The computer program is written in FORTRAN Extended and is used with the CDC Cyber Computer series.

Listing

A listing of the main program and three general input and output subroutines are given in the Appendix.

Breakdown of Program

Main program: DUBBLE

- performs all calculations except the solution of the tridiagonal matrix equation resulting from the ADIP formulation.

Subroutines:

MASOO8 - identical with the IBM subroutine GELB for the solution of a matrix equation with band structure.

INPUTT - reads most of the required data at the beginning of the program.

INP2 - provided to read new data after a specified time interval to simulate varying conditions, e.g. precipitation. The form listed in the Appendix is a dummy routine.

REPORT - Performs printout of results after each time step.

Options

The use of variable element dimensions permits greater flexibility in the size and shape of the aquifer systems which can be modelled. The application of this feature is fully described in Vandenberg (1976).

Recharge and withdrawal of any kind can be defined separately for each element and can vary with time.

The bulk of the data read and the output of the piezometric head and water table elevation are performed by separate subroutines, INPUTT and REPORT, respectively, and can thus be tailored to the particular requirements of each application with relative ease and without changes in the main program.

Structure of Input Data Deck

Card 1: column 1-30: A format description for printing (by SUBROUTINE REPORT) the arrays of water table elevation and piezometric head (see listing, lines 9 and 12 of subroutine REPORT).

Card 2: Free format, six integers: K_1, K_2, K_3, determining, respectively, the first value, last value and skip factor for the array elements of H and h which will be printed in the x(=I) direction; K_4, K_5, K_6, the first value, last value and skip factor, for printing the H and h matrices in the y(=J) direction. See lines 9 and 12 of subroutine REPORT.

Card 3: Free format, two integers: MX = number of nodes, including the boundary nodes, in the x-direction; MY = number of nodes, including the boundary nodes, in the y-direction.

Card 4 (plus as many as needed) Free format. The next set of data is read under control of subroutine INPUTT. In the form given in the listing the order of information to be given here is:

(1) H-matrix of initial saturated depth for water table aquifer,

(2) HH-matrix of initial piezometric head for confined aquifer, zero-reference elevation must be the base of the water table aquifer,

(3) P-matrix of permeability of the water table aquifer,

(4) T-matrix of transmissivity of the confined aquifer,

(5) S1-matrix of specific yield of water table aquifer,

(6) S2-matrix of storativity of confined aquifer,

(7) QQ-matrix of recharge to water table aquifer,

(8) Q-matrix of discharge from confined aquifer; note again that Q and QQ are to be given in units of L/T, and well injection or discharge rates given in units of L^3/T must be divided by (DXxDY),

(9) R-matrix of resistivity of aquitard

$$R = 1/C = d/Kv$$

(10) IX(J,1), (MY-2) integer values indicating the left-hand side boundary element on all inside rows [row 2 to row (MY-1)]; the meaning and use of the IX- and IY-arrays are described in Vandenberg (1974b),

(11) IX(J,2), (MY-2) integer values indicating the right-hand side boundary element on all inside rows [row 2 to row (MY-1)],

(12) IY(I,1), (MX-2) integer values indicating the bottom boundary element on all inside columns [column 2 to column (MX-1)],

(13) IY(I,2), (MX-2) integer values indicating the top boundary element on all inside columns [column 2 to column (MX-1)],

(14) DDXX(I), MX element dimensions, in x-direction,

(15) DDYY(I), MY element dimensions, in y-direction.

Last Card: Free format, five values.

DT = initial value of time step

TMX = total time for simulation

TINC = factor with which DT is multiplied each time step, usual value between 1.00 and 1.25

COMP = accuracy on the result in the iterative routine for calculation of saturated thickness. If for all points of the array the newly calculated value of H differs from the last value by less than COMP iterations are stopped. The maximum number of iterations is arbitrarily set at 40 even if the accuracy is not met.

ICD = if ICD $\neq$ 0, the values of H after each iteration will be printed.

The program is designed to return to the statement (line 15 of the listing) which reads the last card each time that the total time reaches the specified value of TMX. In other words, the last card can be repeated a number of times, each time resetting the values of DT, TMX, TINC, COMP, and ICD. Furthermore, this READ statement is followed by a call to subroutine INP2. If a statement such as

```
Q(25,25) = Q(25,25) + 0.001
```

is inserted between lines 5 and 6 of the listing for subroutine INP2, changes in the original data can be made automatically with repeated insertions of the last card in the data deck. Alternatively, a statement such as

```
READ*, Q(25,25), Q(10,10)
```

could be inserted. This would necessitate the insertion of an extra data card with the two new values of Q after each occurrence of "Last Card."

To stop execution, a card with a zero value in the first field (value of DT) and four arbitrary values (TMX, TINC, COMP and ICD) must be inserted at the bottom of the deck. Since free format list-directed input is used, such a last card could be 5*0.

COMPARISON OF MODEL RESULTS WITH ANALYTICAL SOLUTION AND EXAMPLE OF DATA CARD PREPARATION

Comparison with analytical solutions is possible for special cases:

(1) With resistance, R, very large, the two solutions will be independent and drawdown in the confined aquifer from one pumped well in the centre will duplicate the Theis equation (De Wiest, 1965)

$$s = h(t = 0) - h(t) = Q/(4\pi T) \int_{r^2 S_2/(4Tt)}^{\infty} \exp(-u)/u \, du$$

(2) With S_1 very large, leakage from the water table aquifer to the confined aquifer will not affect the water table elevation and the drawdown caused by one well pumping from the centre of the model will duplicate the Hantush equation for leaky aquifers (De Wiest, 1965)

$$s = Q/(4\pi T) \int_{r^2 S_2/(4Tt)}^{\infty} \exp\{(-u - r^2/(4B^2 u)\}/u \, du$$

where $B = (TD/K_v)^{1/2} = (TR)^{1/2} = (T/C)^{1/2}$

(3) If the initial saturated thickness of the water table aquifer is set to a large value relative to the expected drawdown, the water table will react as if it were confined. An analytic solution for this case is given by Hantush (1967), but the general solution is cumbersome. However, if the diffusivities of the two aquifers are equal, i.e.,

$$T/S_2 = KH/S_1 \qquad (3)$$

a solution can be found.

For that case Equations 1 and 2 can be written

$$T\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}\right) + (H-h)C = S_2 \, \partial h/\partial t \tag{4}$$

$$T_1\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) - (H-h)C = S_1 \, dH/\partial t \tag{5}$$

where $T_1 = KH$,

and the boundary conditions

$$H(r,0) = h(r,0) = 0 \tag{6}$$

$$H(\infty,t) = H(\infty,t) = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{r \to 0} \left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right) = Q/(2\pi T) \tag{8}$$

$$\lim_{r \to 0} \left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) = 0 \tag{9}$$

Adding (4) and (5) and defining a new variable

$$U = h + (T_1/T)H$$

we have

$$\partial^2 U/\partial r^2 + (1/r)\, \partial U/\partial r = (S_2/T)\, \partial U/\partial t \tag{10}$$

and the boundary conditions

$$U(r,0) = U(\infty,t) = 0 \tag{11}$$

$$\lim_{r \to 0} (r \ \partial U/\partial r) = Q/(2\pi T) \tag{12}$$

The solution to the boundary value problem (Equations 10, 11 and 12) is

$$U = h + (T_1/T)H = -Q/(4\pi T)\ W\{r^2 S_2/(4Tt)\} \tag{13}$$

where $W(x) = \int_x^\infty \exp(-u)/u \ du$

Multiplying (4) by T_1 and (5) by T and subtracting, we obtain

$$\partial^2 V/\partial r^2 + (1/r)\ \partial V/\partial r - (T_1+T)C/(TT_1)V = (S_2/T)\ \partial V/\partial T \tag{14}$$

where $V = h - H$

and the conditions

$$V(r,0) = V(\infty,t) = 0 \tag{15}$$

$$\lim_{r \to 0} (r \ \partial V/\partial r) = Q/(2\pi T) \tag{16}$$

Equation 14 is of the same form as the differential equation for leaky aquifers, and therefore the solution to (14), (15) and (16) is

$$V = h - H = -Q/(4\pi T) \int_{r^2S_2/4Tt}^{\infty} \exp(-u - r^2/4B'^2u)/u \, du \qquad (17)$$

where

$$B' = \{(T/C)T_1/(T_1+T)\}^{1/2}$$

and the integral is usually written as $W(u,r/B')$, the Hantush leaky aquifer function.

Combining (13) and (17), we finally have

$$h = -Q/\{4\pi(T+T_1)\}\{W(u) + (T_1/T)W(u,r/B')\} \qquad (18)$$

$$H = -Q/\{4\pi(T+T_1)\}\{W(u) - W(u,r/B')\} \qquad (19)$$

A sample problem was run to simulate the results of (18) and (19), using the following parameters:

MX = MY = 50

DX = DY = 100 m

H = HH = 100 m

$K = 0.2\ m^2/day$, thus $KH = T_1 = 20\ m^2/day$

$T = 10\ m^2/day$

$S_1 = 0.02$

$S_2 = 0.01$

$Q = 0$

QQ(25,25) = 0.01 m/day, equivalent to a point discharge of $100\ m^3/day$

$R = 1/C = 2667$ days

This gives

$$Q/\{4\pi(T+T_1)\} = 0.265$$

$$u = 0.00025\ r^2/t$$

$$B' = 133.33$$

Thus for a node at a distance r from the pumped well, the drawdown, s_w, of the water table, and s_c, of the confined aquifer, are respectively:

$$s_w = 0.265\ \{\ W(0.00025\ r^2/t) - W(0.00025\ r^2/t,\ 0.0075\ r)\}$$

Table 1. Comparison of Model Results with Analytical Solution

Time (days)	Water table drawdown (m)				Confined aquifer drawdown (m)			
	Model	Analytic	Error	Percent error	Model	Analytic	Error	Percent error
	r = 200; r/B' = 1.5; u = 10/t							
10.6	0.019	0.020	-0.001	5.0	0.169	0.150	0.019	12.7
22	0.075	0.079	-0.004	5.0	0.353	0.332	0.021	6.3
38	0.156	0.161	-0.005	3.1	0.500	0.475	0.025	5.3
79	0.309	0.313	-0.004	1.3	0.684	0.652	0.032	4.9
136	0.442	0.444	-0.002	0.5	0.821	0.784	0.037	4.7
272	0.627	0.628	-0.001	0.2	1.007	0.967	0.039	4.1
487	0.768	0.769	-0.001	0.1	1.150	1.109	0.041	3.7
	r = 400; r/B' = 3; u = 40/t							
22	0.010	0.010	0	0	0.035	0.030	0.005	16.7
38	0.036	0.039	-0.003	7.7	0.086	0.080	0.006	7.5
79	0.122	0.124	-0.005	3.9	0.191	0.182	0.009	4.9
136	0.218	0.225	-0.007	3.1	0.293	0.280	0.013	4.6
282	0.375	0.382	-0.007	1.8	0.454	0.437	0.017	3.9
487	0.505	0.512	-0.007	1.4	0.585	0.567	0.018	3.2
	r = 600; r/B' = 4.5; u = 90/t							
38	0.006	0.006	0	0	0.013	0.011	0.002	18.8
79	0.040	0.043	-0.003	7.0	0.056	0.052	0.004	7.1
136	0.098	0.103	-0.005	4.9	0.120	0.113	0.007	6.2
282	0.217	0.224	-0.007	3.1	0.245	0.234	0.011	4.7
487	0.329	0.338	-0.009	2.7	0.360	0.348	0.012	3.4

$$s_c = 0.265 \{W(0.00025\ r^2/t) + 2W(0.00025r^2/t,\ 0.0075r)\}$$

Table 1 gives some results of the test which was run with a starting value of DT = 0.001 days and increased at each time step by a factor of 1.2 to a maximum time of 500 days in 64 time steps.

Figure 2 shows the seven data cards needed to run the program. The repeat feature of the free format READ statement in FORTRAN V Extended is used to enter, for example, the 2500 values of 100 for the H-matrix as 2500*100

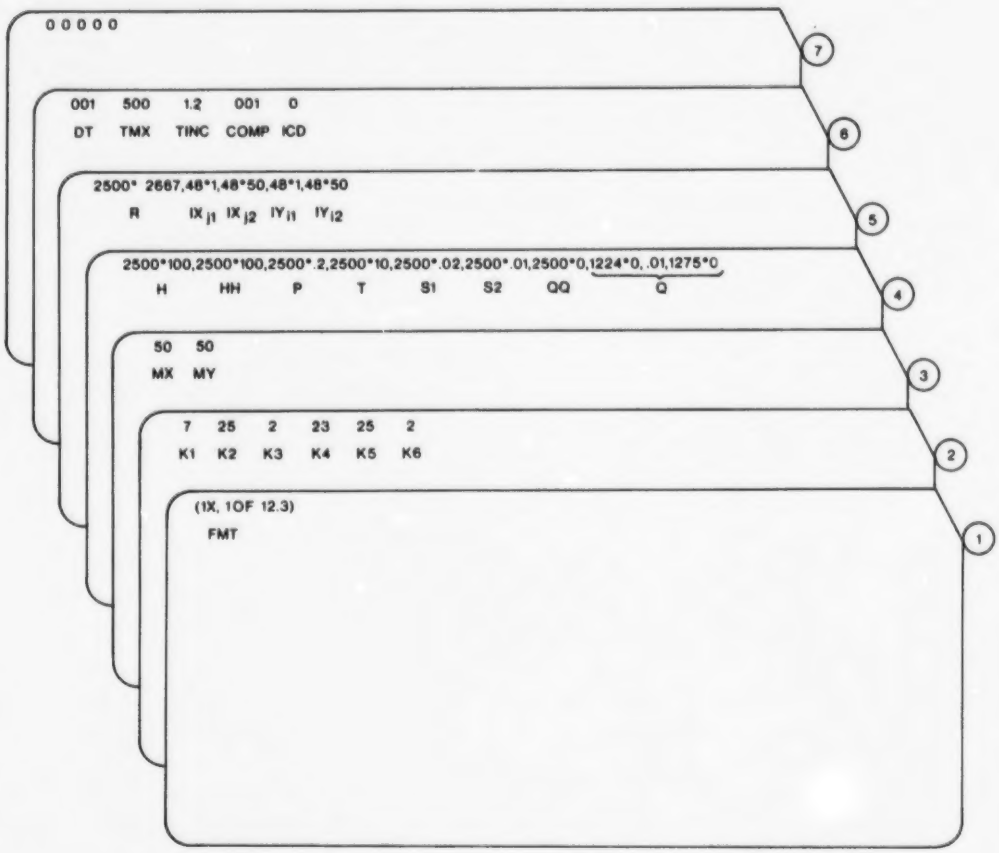

Figure 2. Data cards required to run the test program.

RECHARGE FROM RAINFALL TO AN UNCONFINED AQUIFER

The previous example served as a test of the model segment dealing with the transfer of ground water between the two aquifers through the resistive or leaky bed. This section describes some results of simulations of the water table aquifer when recharge from rainfall is the major input to the aquifer.

Analytic solutions for a linear homogeneous aquifer are first examined in detail to obtain an understanding of the properties and behaviour of the function $H(x,t)$ with which the model solutions subsequently are to be compared.

It should perhaps be stressed here that the basic assumptions of both the numerical and the analytic models are the Dupuit-Forchheimer assumptions, in which H is taken to be invariable with depth. The approximative nature of the model results should therefore be kept in mind in all applications.

Assuming then that the process can be described more or less satisfactorily in terms of horizontal flow, the infiltration of steady rainfall to a water table aquifer can be expressed by the differential equation

$$(\partial/\partial x)(H\ \partial H/\partial x) + q_2/K = (S_1/K)\ \partial H/\partial t \qquad (20)$$

Figure 3 shows a typical system with boundary conditions

$$H(x = 0,t) = H(x = L,t) = H(x,t = 0) = H_0 \tag{21}$$

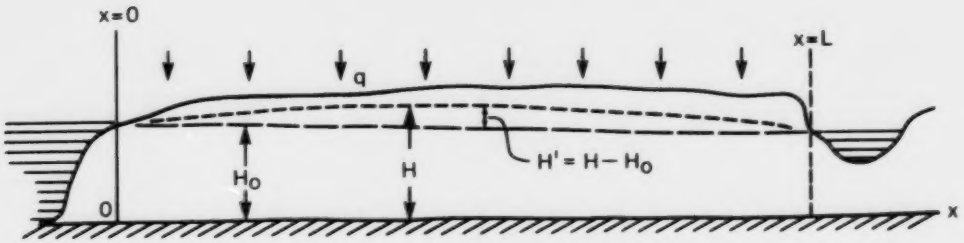

Figure 3. Definition sketch, water table aquifer under steady, uniform recharge.

Steady State Solution

Under steady recharge the water table will build up while at the same time a gradient will develop on the water table, causing outward flow to the boundaries. This gradient becomes greater as the water table builds up and, finally, a steady state equilibrium is reached in which the recharge is exactly balanced by the lateral outflow.

This steady state is completely described by the differential equation:

$$(\partial/\partial x)\ (H\ \partial H/\partial x) + q_2/K = 0 \tag{22}$$

and the boundary conditions

$$H(0) = H(L) = H_o \qquad (23)$$

The solution of (22) and (23) is

$$H^2 - H_o^2 = q_2 x(L-x)/K$$

Approximate Transient Solution

Equation 20 cannot be solved analytically. However, if the aquifer is thick, the variation of the height of the cross section through which flow occurs, H, varies relatively little and instead of the term

$$(\partial/\partial x)\ (H\ \partial H/\partial x) = H\ \partial^2 H/\partial x^2 + (\partial H/\partial x)^2$$

we may disregard the second term and write

$$\partial^2 H/\partial x^2 + q_2/T = (S_1/T)\ \partial H/\partial t$$

where $T = KH$, the transmissivity.

Putting furthermore

$$H' = H - H_o$$

we have

$$\partial^2 H'/\partial x^2 + q_2/T = (S_1/T)\ \partial H'/\partial t \qquad (24)$$

with the boundary conditions

$$H'(x = 0,t) = H'(x = L,t) = H'(x,t = 0) = 0 \qquad (25)$$

Equations 24 and 25 can be solved as follows.

Taking Laplace transforms of the differential equation and the initial conditions:

$$\partial^2 \bar{h}/\partial x^2 + q_2/Tp = pS_1\bar{h}/T \qquad (26)$$

$$\bar{h}(0,p) = \bar{h}(L,p) = 0$$

where $\bar{h} = \int_0^\infty e^{-pt} H'(t)\, dt$, the Laplace transform of H'

and p = the transform variable.

Equation 26 has the general solution

$$\bar{h} = A(p)\ \exp\{x(S_1p/T)^{1/2}\} + B(p)\ \exp\{-x(S_1p/T)^{1/2}\} + q_2/(S_1p^2) \qquad (27)$$

From the boundary conditions it follows that

$$A = q_2/(S_1p^2)[\exp\{-L(S_1p/T)^{1/2}\} - 1]/[\exp\{L(S_1p/T)^{1/2}\} - \exp\{-L(S_1p/T)^{1/2}\}]$$

$$B = -q_2/(S_1p^2)[\exp\{L(S_1p/T)^{1/2}\} - 1]/[\exp\{L(S_1p/T)^{1/2}\} - \exp\{-L(S_1p/T)^{1/2}\}]$$

Substitution of A and B in (27) gives

$$\bar{h} = q_2/(S_1p^2)[1 - [\sinh\{(L-x)(S_1p/T)^{1/2}\} + \sinh\{x(S_1p/T)^{1/2}\}]/ \sinh\{L(S_1p/T^{1/2}\}] \quad (28)$$

The inverse transform of (28) is

$$H' = -2q_2L^2/(\pi^3T) \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^n/n^3\}[1 - \exp\{-n^2\pi^2tT/(L^2S_1)\}] \cdot[\sin\{n\pi(L-x)/L\} + \sin(n\pi x/L)] \quad (29)$$

But since

$$\sin\{n\pi(L-x)/L\} = \sin(n\pi - n\pi x/L) = -\sin(n\pi x/L)\cos(n\pi)$$

Equation 29 can be simplified to

$$H' = 4q_2L^2/(\pi^3T) \sum_{n=1}^{\infty}[1 - \exp\{-(2n-1)^2\pi^2tT/(L^2S_1)\}] \sin\{(2n-1)\pi x/L\}/(2n-1)^3 \quad (30)$$

For small values of t we may write

$$1 - \exp\{-(2n-1)^2\pi^2 tT/(L^2S_1)\} \approx (2n-1)^2\pi^2 tT/(L^2S_1)$$

and

$$H' \text{ (small } t) \approx 4q_2 t/(\pi S_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\{(2n-1)\ \pi x/L\}/(2n-1) \qquad (31)$$

The series in (31) is known and has the value $\pi/4$,

therefore

$$H' \text{ (small } t) = q_2 t/S_1$$

as can be derived directly from the basic assumptions. At small values of t the gradient of the water table and the outflow are negligible, and the rise of the water table per unit of time equals the infiltration rate divided by the storativity and is independent of x.

For large values of t the exponential term in (30) approaches zero:

$$H'(t \to \infty) = 4q_2L^2/(\pi^3T) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\{(2n-1)\pi x/L)\}/(2n-1)^3$$

The series can be shown to approach the limit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\{(2n-1)\pi x/L\}/(2n-1)^3 = \pi^3 x\ (L-x)/(8L^2)$$

and

$$H'(t \to \infty) = q_2\ x\ (L-x)/(2T) \qquad (32)$$

Equation 32 can also be derived from the steady state version of (24):

$$\partial^2 H'/\partial x^2 + q_2/T = 0$$

subject to the boundary conditions (25).

For $x = L/2$, the highest point of the water table

$$H'(t \to \infty,\ x = L/2) = 4q_2L^2/(\pi^3 T)[1 - 1/3^3 + 1/5^3 - \ldots]$$

The infinite series converges to $\pi^3/32$, giving

$$H'(t \to \infty,\ x = L/2) = q_2L^2/(8T)$$

This result also can be obtained directly from (32).

Time Required to Reach Steady State

Steady state is reached asymptotically as $t \to \infty$ and thus, strictly speaking, there is no particular time at which one can say that steady state has been reached. Nevertheless, it is helpful to be able to estimate the time, t_s, at which H' reaches, for example, 99, of its steady state value:

$$H'(t) > 0.99\ H'(\infty) \tag{33}$$

Examination of Equation 30 shows that a good estimate can be provided by the exponential factor of the leading term of the infinite series. If

$$\exp\{-\pi^2 t_s T/(L^2 S_1)\} < 0.01$$

Equation 33 will be approximately satisfied. Thus

$$t_s \approx -L^2 S_1/(\pi^2 T)\ \ln 0.01$$

or

$$t_s \approx 0.47\ L^2 S_1/T \tag{34}$$

Numerical Versus Analytical Solution

The analytical solution (30) was programmed for computer and used to calculate water table elevations for the following case:

$L = 4000$ m

$K = 50$ m/day

$H_o = 100$ m

$S_1 = 0.01$

$q_2 = 0.001$ m/day

The same case was simulated by DUBBLE. Since DUBBLE solves Equation 20 rather than Equation 24, the thickness of the aquifer was chosen rather large in comparison with the maximum value of $H' = 0.4$ m. The agreement between the two solutions was extremely good, differing by no more than 1 mm, a relative error of approximately 0.2. The water table elevations at various times are shown in Figure 4.

To show the difference between the analytical solution (30) and the numerical solution (20), the numerical model was also used to simulate ground water flow in thinner aquifers (H_o = 10, 5, 2 and 1 m) where the effect of the variable transmissivity is more noticeable. Along with the different values for H_o, different values were also used for the permeability such that the product $K H_o$ remained constant. All other parameters were also kept constant. The steady state results are shown in Figure 5. The time at which H' reaches 99 of its steady state value calculated from Equation 34 is

$$t_s = (0.47)(4000)^2 (10^{-2})/5000 = 15 \text{ days}$$

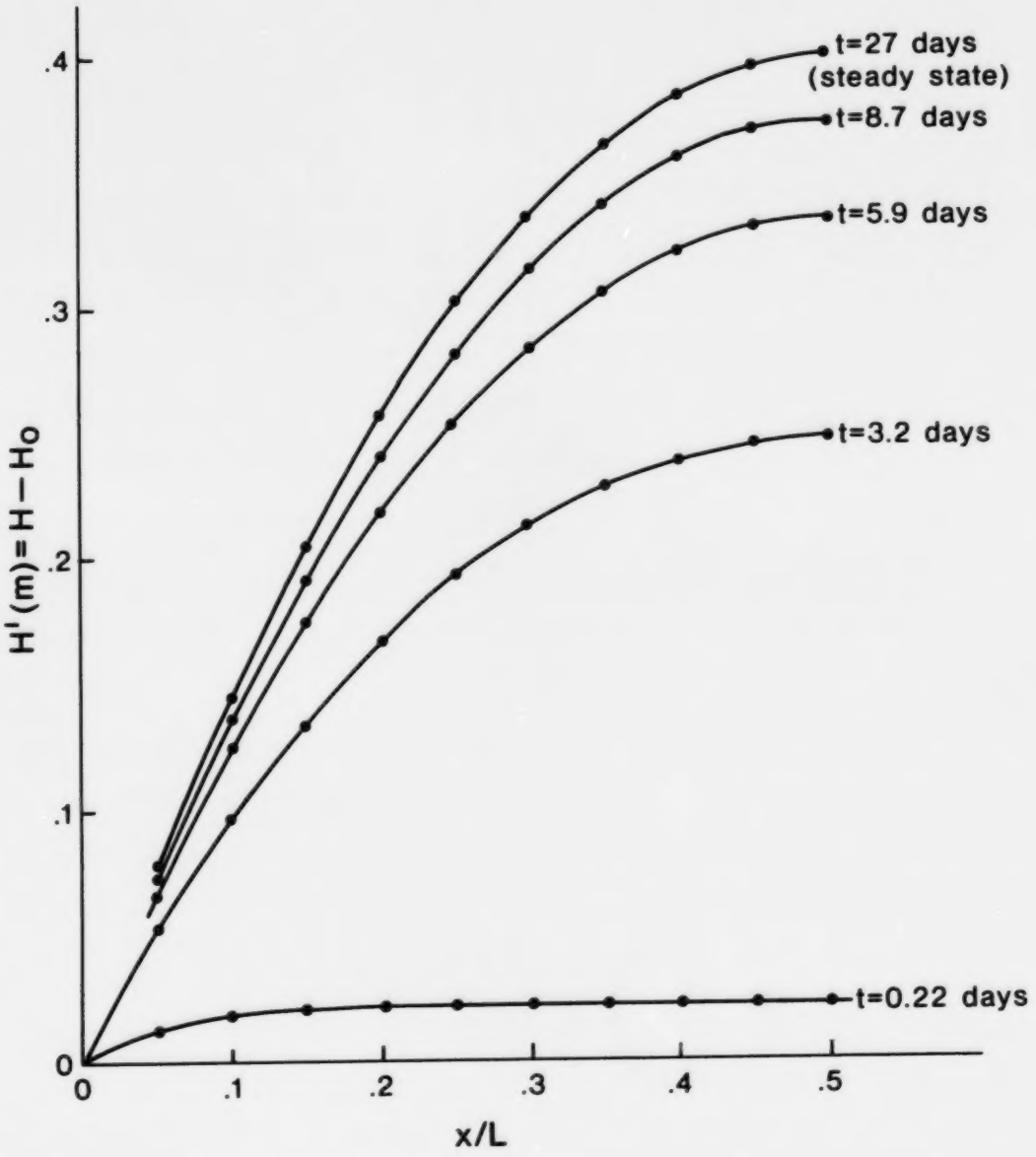

Figure 4. Time variant water table profiles of steady, uniform recharge.

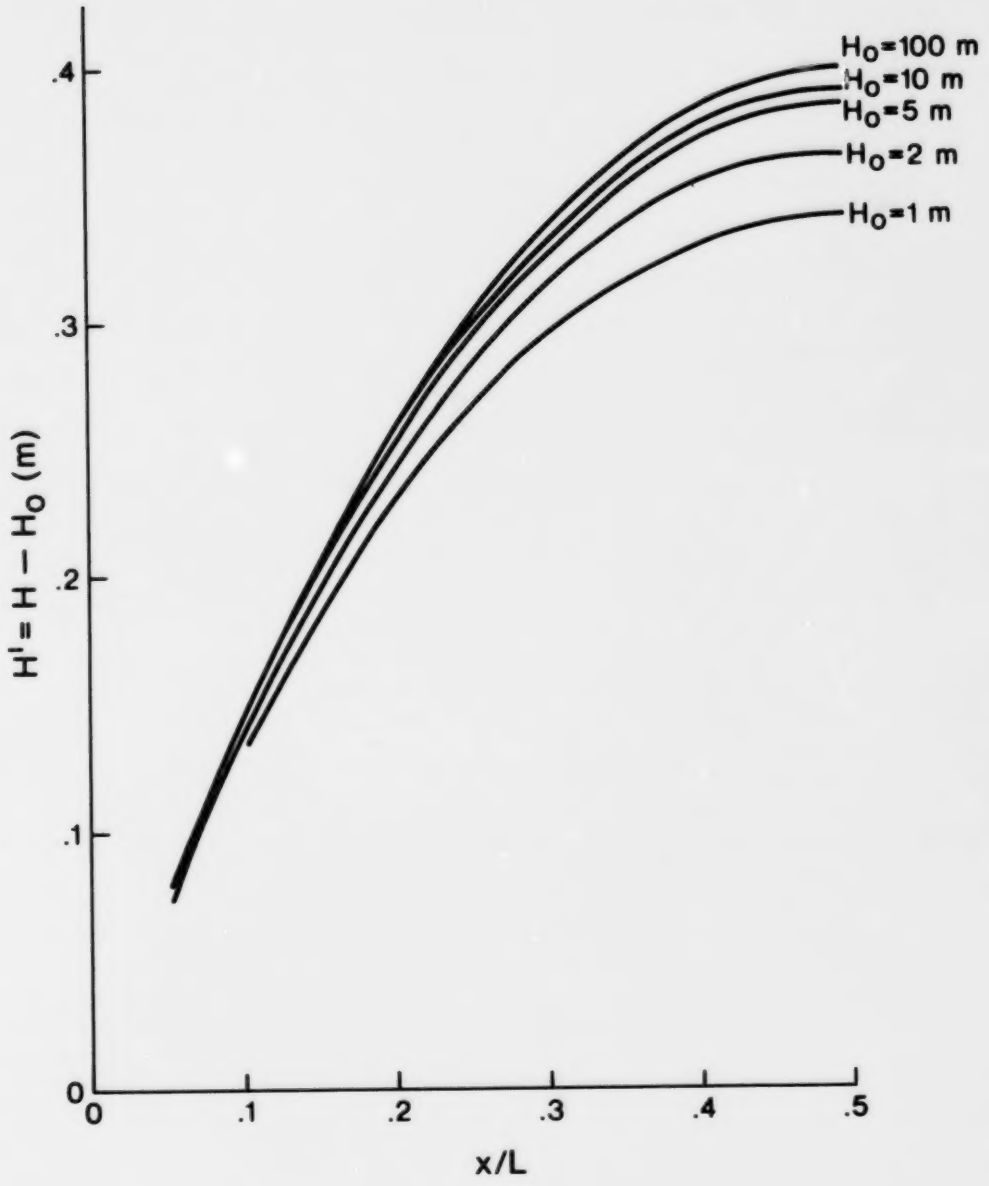

Figure 5. Variation of steady state water table profile with thickness of aquifer.

The time in the simulations closest to t_s was 15.5 days. For this time the ratios $H'(t_s)/H'(\infty)$ are given in Table 2 for the five simulations, H_o = 1, 2, 5, 10 and 100 m, and for the node closest to the boundary (x/L = 0.05) and the centre node (x/L = 0.5).

Table 2. Ratios of $H'(t = 15.5)/H'(t \to \infty)$ for the Five Model Runs, $t_s \approx 15$ days

H_o(m) →	100	10	5	2	1
x/L = 0.05	0.993	0.995	0.996	0.995	0.997
x/L = 0.50	0.992	0.993	0.994	0.993	0.998

REFERENCES

De Wiest, R.J.M. 1965. *Geohydrology*. New York: John Wiley & Sons.

Hantush, M.S. 1967. Flow to wells in aquifers separated by a semipervious layer. Eos. Trans. Am. Geophys. Union, 36(1): 95-100.

Vandenberg, A. 1974a. A digital simulation of horizontal salt-water encroachment induced by fresh-water pumping. Scientific Series No. 41, Inland Waters Directorate, Ottawa.

Vandenberg, A. 1974b. Program SOPH: Simulation of time-variant piezometric surface in a confined aquifer subjected to pumping. Miscellaneous Series, Inland Waters Directorate, Ottawa.

Vandenberg, A. 1976. Program ESOPH - Extended SOPH, Simulation of time-variant piezometric surface in a confined, leaky aquifer subjected to pumping. Miscellaneous Series, Inland Waters Directorate, Ottawa.

Appendix
Program Listing

```
PROGRAM DUBBEL     73/74   OPT=1                          FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

      PROGRAM DUBBEL(INPUT,OUTPUT)
      COMMON P(50,50),H(50,50),HH(50,50),HS(50,50),HQ(50,50),HR(50,50)
      COMMON S1(50,50),S2(50,50),CQ(50,50),R(50,50),A(150),D(50)
      COMMON T(50,50),Q(50,50),IX(50,2),IY(50,2)
      COMMON MX,MY,MX1,MY1,DDXX(50),DDYY(50)
      COMMON K1,K2,K3,K4,K5,ME,FMT(3),ITER,TM
      READ 500,FMT
  500 FORMAT(3A10)
      READ*,K1,K2,K3,K4,K5,K6
      READ*,MX,MY $ MX1=MX-1 $ MY1=MY-1
      CALL INPUTT $ DO 13 I=1,MX $ DO 13 J=1,MY
   13 HS(I,J)=H(I,J) $ TM=0.
   66 READ*,DT,TMX,TINC,COMP,ICO $ IF(DT.LE.0.)STOP
      CALL INP2  $ TM=DT+TM
   22 ITER = 0
   12 DO 14 I=1,MX $ DO 14 J=1,MY
   14 HQ(I,J)=(H(I,J)+HS(I,J))*.5 $ ITER=ITER+1
      DO 31 I=1,MX1 $DO 31 J=1,MY1 $IF(HQ(I,J).GE.0.)GOTO 31
      HQ(I,J)=0. $ PRINT *,I,J
   31 CONTINUE
      DO 3 J=2,MY1 $ IBE=IX(J,1)+1 $ IEN=IX(J,2)-1 $ ICNT=0
       DO 10 I=IBE,IEN $ KK=ICNT*3+1 $ ICNT=ICNT+1
      AT=P(I,J)*HQ(I,J) $ A1=P(I-1,J)*HQ(I-1,J)
      A2=P(I+1,J)*HQ(I+1,J) $ A3=P(I,J-1)*HQ(I,J-1)
      A4=P(I,J+1)*HQ(I,J+1)
      A1=SQRT(AT*A1)/(DDXX(I)*(DDXX(I)+DDXX(I-1)))*2.
      A2=SQRT(AT*A2)/(DDXX(I)*(DDXX(I)+DDXX(I+1)))*2.
      A3=SQRT(AT*A3)/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J-1)))*2.
      A4=SQRT(AT*A4)/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J+1)))*2.
      A(KK)=-A1-A2-2.*S1(I,J)/DT-1./R(I,J)
      D(ICNT)=A1*(H(I,J)-H(I-1,J))+A2*(H(I,J)-H(I+1,J))+2.*A3*
     1(H(I,J)-H(I,J-1))+2.*A4*(H(I,J)-H(I,J+1))-2.*QQ(I,J)
     2-H(I,J)*(2.*S1(I,J)/DT-1./R(I,J))-2.*HH(I,J)/R(I,J)
      IF(I.EQ.IBE)D(ICNT)=D(ICNT)-A1*H(I-1,J)$IF(I.NE.IBE)A(KK-1)=A1
      IF(I.EQ.IEN)D(ICNT)=D(ICNT)-A2*H(I+1,J)$IF(I.NE.IEN)A(KK+1)=A2
   10 CONTINUE $ CALL MAS008(D,A,ICNT,1,1,1,E-4,IER) $ ICNT=0
      DO 11 I=IBE,IEN $ ICNT=ICNT+1
   11 HR(I,J)=D(ICNT)
    3 CONTINUE $ DO 4 I=2,MX1 $ IBE=IY(I,1)+1 $ IEN=IY(I,2)-1$ICNT=0
      DO 5 J=IBE,IEN $ KK=ICNT*3+1 $ ICNT=ICNT+1
      AT=P(I,J)*HQ(I,J) $ A1=P(I-1,J)*HQ(I-1,J)
      A2=P(I+1,J)*HQ(I+1,J) $ A3=P(I,J-1)*HQ(I,J-1)
      A4=P(I,J+1)*HQ(I,J+1)
      A3=SQRT(AT*A3)/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J-1)))*2.
      A4=SQRT(AT*A4)/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J+1)))*2.
      A(KK)=-A3-A4-2.*S1(I,J)/DT-1./R(I,J)
      D(ICNT)=A3*(H(I,J-1)-H(I,J))+A4*(H(I,J+1)-H(I,J))-HR(I,J)*
     1(2.*S1(I,J)/DT+1./R(I,J))
      IF(J.EQ.IBE)D(ICNT)=D(ICNT)-A3*H(I,J-1) $IF(J.NE.IBE)A(KK-1)=A3
      IF(J.EQ.IEN)D(ICNT)=D(ICNT)-A4*H(I,J+1)$IF(J.NE.IEN)A(KK+1)=A4
    5 CONTINUE $ CALL MAS008(D,A,ICNT,1,1,1,E-4,IER)
      IF(ICO.NE.0)PRINT*,(D(J),J=1,ICNT),I,IER
      ICNT=0 $ DO 6 J=IBE,IEN      $ ICNT=ICNT+1
    6 HP(I,J)=D(ICNT)
    4 CONTINUE  $ DO 7 I=2,MX1  $ DO 7 J=2,MY1
      IF(ABS(HR(I,J)-HS(I,J)).GT.COMP)GOTO 8
    7 CONTINUE
```

```
PROGRAM DUBBEL     73/74   OPT=1                    FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

          17    DO 15 J=2,MY1 $ DO 9 I=2,MX1
                HS(I,J)=HR(I,J)
60           9 H(I,J)=HR(I,J)
          15    CONTINUE $ GOTO 23
            100 FORMAT(2X,F12.3,2I2)
          200   FORMAT(1X,8F12.4)
             8  DO 16 I=2,MX1 $ DO 16 J=2,MY1
65          16 HS(I,J)=HR(I,J) $ IF(ITER.LT.40)GOTO 12 $ GOTO 17
            23 DO 24 J=2,MY1 $ IBE=IX(J,1)+1 $ IEN=IX(J,2)-1 $ ICNT=0
               DO 25 I=IBE,IEN $ KK=ICNT*3+1 $ ICNT=ICNT+1
               A3=SQRT(T(I,J)*T(I,J-1))/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J-1)))**2.
               A4=SQRT(T(I,J)*T(I,J+1))/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J+1)))**2.
70             A1=SQRT(T(I,J)*T(I-1,J))/(DDXX(I)*(DDXX(I)+DDXX(I-1)))**2.
               A2=SQRT(T(I,J)*T(I+1,J))/(DDXX(I)*(DDXX(I)+DDXX(I+1)))**2.
               A(KK)=-A1-A2-2.*S2(I,J)/DT-1./R(I,J)
               D(ICNT)=A1*(HH(I,J)-HH(I-1,J))+A2*(HH(I,J)-HH(I+1,J))
              1+2.*(A3*(HH(I,J)-HH(I,J-1))+A4*(HH(I,J)-HH(I,J+1)))+Q(I,J)
75            2-H(I,J)/R(I,J))-HH(I,J)*(2.*S2(I,J)/DT-1./R(I,J))
               IF(I.EQ.IBE)D(ICNT)=D(ICNT)-A1*HH(I-1,J)$ IF(I.NE.IBE)A(KK-1)=A1
               IF(I.EQ.IEN)D(ICNT)=D(ICNT)-A2*HH(I+1,J )$ IF(I.NE.IEN)A(KK+1)=A2
            25 CONTINUE $ CALL MAS0080(D,A,ICNT,1,1,1,1,E-4,IER)
               ICNT=0 $ DO 26 I=IBE,IEN $ ICNT=ICNT+1
80          26 HR(I,J)=D(ICNT)
            24 CONTINUE $ DO 27 I=2,MX1 $ IBE=IY(I,1)+1 $ IEN=IY(I,2)-1
               ICNT=0 $ DO 28 J=IBE,IEN $ KK=ICNT*3+1 $ ICNT=ICNT+1
               A3=SQRT(T(I,J)*T(I,J-1))/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J-1)))**2.
               A4=SQRT(T(I,J)*T(I,J+1))/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J+1)))**2.
85             A(KK)=-A3-A4-2.*S2(I,J)/DT-1./R(I,J)
               D(ICNT)=A3*(HH(I,J-1)-HH(I,J))+A4*(HH(I,J+1)-HH(I,J))-HR(I,J)*
              1(2.*S2(I,J)/DT+1./R(I,J))
               IF(J.EQ.IBE)D(ICNT)=D(ICNT)-A3*HH(I,J-1)$ IF(J.NE.IBE)A(KK-1)=A3
               IF(J.EQ.IEN)D(ICNT)=D(ICNT)-A4*HH(I,J+1)$IF(J.NE.IEN)A(KK+1)=A4
90          28 CONTINUE $ CALL MAS0080(D,A,ICNT,1,1,1,1,E-4,IER)
               ICNT=0 $ DO 29 J=IBE,IEN
               ICNT=ICNT+1
            29 HH(I,J)=D(ICNT)
          27    CONTINUE
95             CALL REPORT $ CT=DT*TINC
               IF(TM.EQ.TMX)GOTO 66
               TM=TM+DT $ IF(TM.LT.TMX)GOTO 22 $ TM=TM-DT
               DT=TMX-TM $ TM=TMX $ GOTO 22 $ END
```

```
  SUBROUTINE INPUTT     73/74   OPT=1                    FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

1                 SUBROUTINE INPUTT
                  COMMON P(50,50),H(50,50),HH(50,50),HS(50,50),HQ(50,50),HR(50,50)
                  COMMON S1(50,50),S2(50,50),QQ(50,50),R(50,50),A(150),D(50)
                  COMMON T(50,50),Q(50,50),IX(50,2),IY(50,2)
5                 COMMON MX,MY,MX1,MY1,DDXX(50),DDYY(50)
                  READ*,((H(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
                  READ*,((HH(I,J),I=1,MX),J=1,MY)$READ*,((P(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
                  READ*,((T(I,J),I=1,MX),J=1,MY)$READ*,((S1(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
                  READ*,((S2(I,J),I=1,MX),J=1,MY)$READ*,((QQ(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
10                READ*,((Q(I,J),I=1,MX),J=1,MY)$READ*,((R(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
                  READ*,(IX(J,1),J=2,MY1) $ READ*,(IX(J,2),J=2,MY1)
                  READ*,(IY(I,1),I=2,MX1) $ READ*,(IY(I,2),I=2,MX1)
                  READ*,(DDXX(I),I=1,MX) $ READ*,(DDYY(I),I=1,MY)
                  RETURN $  END


  SUBROUTINE INP2       73/74   OPT=1                    FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

1                 SUBROUTINE INP2
                  COMMON P(50,50),H(50,50),HH(50,50),HS(50,50),HQ(50,50),HR(50,50)
                  COMMON S1(50,50),S2(50,50),QQ(50,50),R(50,50),A(150),D(50)
                  COMMON T(50,50),Q(50,50),IX(50,2),IY(50,2)
5                 COMMON MX,MY,MX1,MY1,DDXX(50),DDYY(50)
                  RETURN $ END


  SUBROUTINE REPORT     73/74   OPT=1                    FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

1                 SUBROUTINE REPORT
                  COMMON P(50,50),H(50,50),HH(50,50),HS(50,50),HQ(50,50),HR(50,50)
                  COMMON S1(50,50),S2(50,50),QQ(50,50),R(50,50),A(150),D(50)
                  COMMON T(50,50),Q(50,50),IX(50,2),IY(50,2)
5                 COMMON MX,MY,MX1,MY1,DDXX(50),DDYY(50)
                  COMMON K1,K2,K3,K4,K5,K6,FMT(3),ITER,TM
                  PRINT 100,TM,ITER
          100     FORMAT(2X,E12.5,I5//)
                  PRINT FMT,((H(I,J),I=K1,K2,K3),J=K4,K5,K6)
10                PRINT 200
          200     FORMAT(/)
                  PRINT FMT,((HH(I,J),I=K1,K2,K3),J=K4,K5,K6)
                  RETURN  $ END
```

Environnement Canada Environment Canada

Institut national de recherches en hydrologie

RAPPORT Nº 18 DE L'INRH

Programme DUBBLE — Simulation de la variation de la surface libre et de la charge piézométrique dans un système composé d'un aquifère à nappe libre et d'un aquifère captif séparés par une couche semi-perméable capacitive

A. Vandenberg

INRH

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHES EN HYDROLOGIE
DIRECTION GÉNÉRALE DES EAUX INTÉRIEURES
OTTAWA, CANADA, 1982

© Ministre des Approvisionnements et Services Canada 1983

N° de cat. En 36-511/18F

ISBN 0-662-92006-6

Table des matières

	Page
RESUME	v
ABSTRACT	v
INTRODUCTION	1
TRAITEMENT MATHEMATIQUE	2
PROGRAMME INFORMATIQUE	4
Langage	4
Listage	4
Décomposition du programme	4
Options	4
Cartes de données d'entrée	4
COMPARAISON DES RESULTATS DU MODELE ET DE LA SOLUTION ANALYTIQUE; EXEMPLE DE PREPARATION DES CARTES DE DONNEES	6
ALIMENTATION EN EAU DE PLUIE D'UN AQUIFERE A NAPPE LIBRE	11
Solution en régime permanent	12
Solution approximative en régime transitoire	13
Temps requis pour atteindre le régime permanent	15
Solution numérique contre solution analytique	16
REFERENCES	19
ANNEXE. Listage de programme	21

Tableaux

1.	Comparaison des résultats du modèle et de la solution analytique	10
2.	Rapports $H'(t = 15.5)/H'(t \to \infty)$ pour les cinq essais du modèle, t_s = 15 jours	16

Illustrations

		Page
Figure 1.	Schéma d'un système comprenant un aquifère à nappe libre et un aquifère captif séparés par une couche semi-perméable capacitive.....	2
Figure 2.	Cartes de données requises pour passer le programme d'essai.....	11
Figure 3.	Schéma d'un aquifère à nappe libre en condition d'alimentation uniforme constante.....	12
Figure 4.	Profils de la surface libre variant avec le temps, en condition d'alimentation uniforme constante.....	17
Figure 5.	Variation du profil de la surface libre en régime permanent en fonction de l'épaisseur de l'aquifère.....	18

Résumé

On décrit un programme informatique qui applique la méthode implicite bidimensionnelle des différences finies, de direction alternante, à un système composé de deux aquifères séparés par une couche semi-perméable capacitive. L'un des aquifères peut être soit à nappe libre, soit captif, et l'autre est captif. On considère que l'écoulement dans les aquifères est horizontal, et il est possible de décrire séparément les débits entrant et sortant pour chaque aquifère. Le programme comprend des sous-programmes distincts pour l'entrée et la sortie, ce qui facilitera l'adaptation à des conditions particulières, par exemple à des débits entrant ou sortant qui varient en fonction du temps. On traite de façon détaillée d'un certain nombre d'applications et on donne un exemple résolu.

Abstract

A computer program is documented which describes the two-dimensional finite-difference alternating direction implicit method applied to a system of two aquifers coupled by a resistive bed. One of the aquifers may be either a water table aquifer or a confined aquifer, whereas the second aquifer is confined. Flow in the aquifers is assumed horizontal, and recharge and discharge may be specified separately for each aquifer. The program is written with separate subroutines for input and output; this will facilitate adaptation to a particular requirement, as, for example, recharge or discharge varying with time. A number of applications are discussed in detail and a solved example is provided.

Programme DUBBLE — Simulation de la variation de la surface libre et de la charge piézométrique dans un système composé d'un aquifère à nappe libre et d'un aquifère captif séparés par une couche semi-perméable capacitive

A. Vandenberg

INTRODUCTION

Dans les régions qui subissent peu de perturbations géologiques, le réseau d'eau souterraine des couches de faible profondeur peut souvent être décrit avec une précision satisfaisante comme étant un système stratifié de couches horizontales, alternativement conductrices (aquifères) et résistantes (aquitards). Dans les aquifères, on peut alors considérer que l'écoulement est surtout horizontal vers une source positive ou négative, ponctuelle ou linéaire, ou à partir d'une telle source, alors que dans les aquitards, l'écoulement est pratiquement vertical lorsque le contraste de résistance entre l'aquitard et les aquifères est marqué.

De plus, si on considère que le potentiel dans l'aquitard varie linéairement en fonction de la profondeur, on peut établir le système d'équations différentielles nécessaires à décrire l'écoulement dans les aquifères indépendamment du potentiel dans l'aquitard, la résistance de l'aquitard étant suffisante pour décrire le transfert d'eau d'un aquifère à l'autre.

Dans le présent rapport, on décrit une méthode de simulation numérique d'un tel système formé de deux aquifères séparés par une couche résistante. Dans cette méthode, on considère que l'un des aquifères est à nappe libre et l'autre est semi-captif à sa partie supérieure et captif à sa partie inférieure (figure 1). Dans l'aquifère à nappe libre, la conductivité horizontale varie en fonction du temps, puisqu'elle est le produit de l'épaisseur saturée et de la perméabilité. Dans l'aquifère captif, la conductivité horizontale, c.-à-d. la transmissivité ou produit de la perméabilité par l'épaisseur, est constante. Pour calculer la charge piézométrique dans l'aquifère captif, on se sert de la méthode implicite des différences finies, de direction alternante. Dans une application antérieure par Vandenberg (1974a,b; 1976), la charge au-dessus de la couche semi-perméable capacitive - l'aquitard - était constante alors que dans la présente méthode elle est remplacée par l'élévation de la surface libre et varie par conséquent en fonction du temps. Dans le calcul de l'élévation de la surface libre, il faut tenir compte du fait que la conductivité varie avec l'épaisseur de la zone saturée; c'est pourquoi la présente partie du modèle comprend une méthode itérative en plus de la méthode de direction alternante.

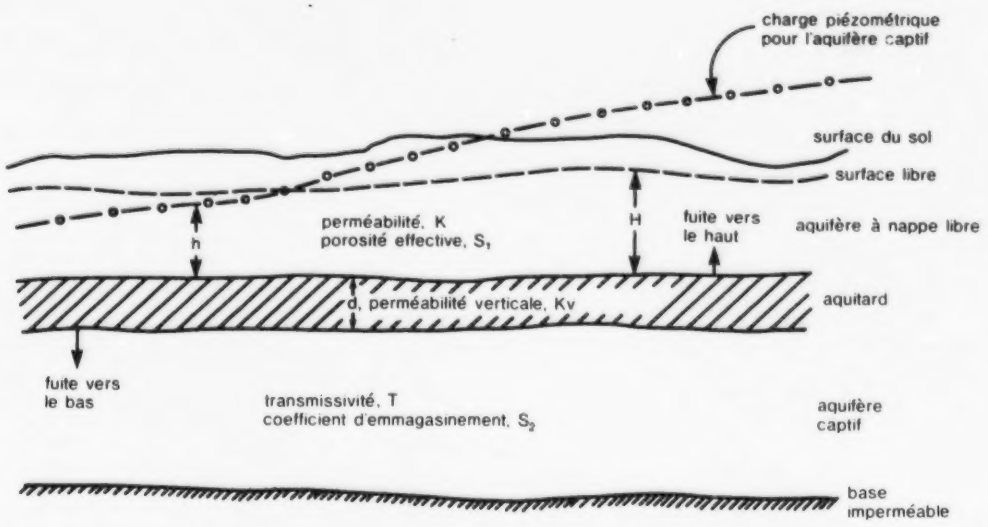

Figure 1. Schéma d'un système comprenant un aquifère à nappe libre et un aquifère captif séparés par une couche semi-perméable capacitive.

TRAITEMENT MATHEMATIQUE

L'équation du bilan hydrique pour un parallélépipède élémentaire d'un aquifère captif peut s'exprimer (Vandenberg, 1976) sous la forme

$$\partial/\partial x(T\partial h/\partial x) + \partial/\partial y(T\partial h/\partial y) + q_1 + (H-h)C = S_2 dh/dt \qquad (1)$$

où T = transmissivité = perméabilité x épaisseur de l'aquifère (L^2/T),
h = charge piézométrique (L),
H = élévation de la surface libre (L); h et H sont tous deux mesurés par rapport au même niveau de référence standard que l'on a choisi, pour des raisons d'ordre pratique, comme étant la base de l'aquifère libre,
q_1 = alimentation positive ou négative, entrant dans ou sortant de l'aquifère captif, par pompage ou injection, exprimée en hauteur d'eau par unité de temps (L/T)
C = conductivité de l'aquitard (T^{-1}); $C = K_v/d$ où
K_v = perméabilité verticale de l'aquitard (L/T) et
d = épaisseur de l'aquitard (L),
S_2 = coefficient d'emmagasinement de l'aquifère captif (sans dimensions), et
t = temps.

Vandenberg (1974a,b; 1976) a décrit de façon détaillée la MIDA (méthode implicite de direction alternante) utilisée pour

résoudre l'équation 1. Pour l'aquifère libre, l'équation du bilan hydrique (1) prend la forme

$$(\partial/\partial x)(KH\partial H/\partial x) + (\partial/\partial y)(KH\partial H/\partial y) + q_2 + (h-H)C = S_1\partial H/\partial t \quad (2)$$

où K = perméabilité de l'aquifère à nappe libre (L/T),
H = épaisseur saturée de l'aquifère à nappe libre (L),
q_2 = alimentation positive ou négative, entrant dans ou sortant de l'aquifère à nappe libre, par pompage, injection, précipitation, évaporation, infiltration, etc. (L/T). Remarquer que q_1 et q_2 sont tous deux donnés en débit par unité de surface, ce qui est conforme à l'usage dans le cas de la précipitation, etc.; dans le cas d'une alimentation ponctuelle, positive ou négative, cette pratique est cependant contraire à l'usage, et il faut diviser l'unité courante (mètres cubes par jour, par exemple) par l'aire représentative, qui est, dans le modèle des différences finies, l'aire du rectangle élémentaire.
S_1 = capacité de rétention de l'aquifère à nappe libre (sans dimension).

L'équation (2) n'est pas linéaire, car le terme $(\partial/\partial x)(KH\partial H)/\partial x$, par exemple, peut s'écrire sous la forme

$$(\partial/\partial x)(KH\partial H/\partial x) = K\{H\partial^2 H/\partial x^2 + (\partial H/\partial x)^2\}$$

Dans une méthode par différences finies, les équations renferment alors des termes contenant à la fois H et H^2. Ce fait ne crée aucune difficulté dans les expressions explicites, mais il devient embarrassant dans toute expression implicite. Dans le présent traitement, on adopte à la place une méthode itérative. On prend d'abord l'épaisseur saturée initiale, H_t, au début de l'intervalle de temps Δt, et on calcule une valeur temporaire $H'_{t+\Delta t}$ pour la représenter à la fin de l'intervalle de temps. En supposant que, pendant le court intervalle, la charge varie linéairement en fonction du temps, on prend comme épaisseur saturée la moyenne de H_t et $H'_{t+\Delta t}$, et on calcule une nouvelle valeur approximative de $H_{t+\Delta t}$ qui est plus précise. Lorsque la variation de $H'_{t+\Delta t}$ est inférieure à une limite de précision établie à l'avance, on cesse l'itération et on procède au calcul de la charge piézométrique.

Pour être rigoureux, on devrait prendre la charge piézométrique, h, apparaissant dans le terme de fuite de l'équation 2

$$(h-H)C$$

comme la charge moyenne pendant l'intervalle de temps; de même, on devrait prendre l'élévation moyenne de la surface libre, H, dans le terme de fuite de l'équation 1. Etant donné que cette élévation moyenne nous est déjà fournie par la partie itérative du programme, on l'a utilisée. Cependant, le calcul de la valeur moyenne de h pendant l'intervalle de temps nécessiterait de l'espace de mémoire additionnel et l'ajustement par itération à la fois de H et h. On a jugé qu'un tel raffinement n'était pas justifié, compte tenu des coûts additionnels de traitement informatique qui en résulteraient.

PROGRAMME INFORMATIQUE

Langage

Le programme est écrit en FORTRAN étendu et est passé sur un ordinateur de la série CDC Cyber.

Listage

Un listage du programme principal et des trois sous-programmes généraux d'entrée et de sortie est donné en annexe.

Décomposition du programme

Programme principal : DUBBLE

- effectue tous les calculs, sauf la résolution de l'équation de la matrice tridiagonale résultant des équations obtenues par la MIDA.

Sous-programmes:

MAS008 - identique au sous-programme GELB d'IBM pour la résolution d'une équation matricielle à structure en bandes.
INPUTT - lit la plus grande partie des données requises au début du programme.
INP2 - sert à lire de nouvelles données après un intervalle de temps déterminé pour la simulation de conditions variables, p. ex. la précipitation. Le sous-programme présenté dans l'annexe en est une forme fictive.
REPORT - imprime les résultats après chaque intervalle de temps.

Options

L'utilisation de dimensions variables des éléments permet une plus grande souplesse dans les dimensions et les formes des systèmes aquifères que l'on peut représenter par un modèle. L'application de cette option est décrite de façon détaillée dans Vandenberg (1976).

Tout type d'alimentation positive ou négative peut être défini indépendamment pour chaque élément et peut varier en fonction du temps.

La lecture de la majeure partie des données et l'impression de la charge piézométrique et de l'élévation de la surface libre sont exécutées par des sous-programmes indépendants, INPUTT et REPORT respectivement. On peut donc adapter assez facilement ces sous-programmes aux besoins particuliers de chaque application sans modifier le programme principal.

Cartes de données d'entrée

Carte 1 : colonnes 1-30 : Description du format d'impression (par le sous-programme REPORT) pour les données sur l'élévation de la surface libre et la charge piézométrique (voir les lignes 9 et 12 du sous-programme REPORT en annexe).

Carte 2 : Structure non imposée, six entiers : K_1, K_2, K_3, déterminant respectivement la première valeur, la dernière valeur et le facteur de saut pour les éléments des tableaux de H et h qui seront imprimés dans la direction des X (=I); K_4, K_5 et K_6, déterminant la première valeur, la dernière valeur et le facteur de saut pour l'impression des matrices de H et h dans la direction des y(=J). Voir les lignes 9 et 12 du sous-programme REPORT.

Carte 3 : Structure non imposée, deux entiers : MX = nombre de noeuds, y compris les noeuds aux limites, dans la direction des x; MY = nombre de noeuds, y compris les noeuds aux limites, dans la direction des y.

Carte 4 : (plus autant de cartes que requis) Structure non imposée. La lecture de l'ensemble de données suivant est effectuée par le sous-programme INPUTT. Pour respecter la forme donnée dans le listage, les données doivent être fournies dans l'ordre suivant:

(1) matrice H de l'épaisseur saturée initiale de l'aquifère à nappe libre,

(2) matrice HH de la charge piézométrique initiale de l'aquifère captif, le niveau de référence nul doit être la base de l'aquifère à nappe libre,

(3) matrice P de la perméabilité de l'aquifère à nappe libre,

(4) matrice T de la transmissivité de l'aquifère captif,

(5) matrice S1 de la porosité effective de l'aquifère à nappe libre,

(6) matrice S2 du coefficient d'emmagasinement de l'aquifère captif,

(7) matrice QQ de l'alimentation positive de l'aquifère à nappe libre,

(8) matrice Q de l'alimentation négative de l'aquifère captif; on remarque encore une fois que Q et QQ sont donnés en unités L/T et que les débits entrant ou sortant, donnés en unités L^3/T, doivent être divisés par (DXxDY),

(9) matrice R de la résistivité de l'aquitard
$$R = 1/C = d/K_v$$

(10) IX(J,1), (MY-2) valeurs entières représentant les éléments aux limites gauches de toutes les lignes intérieures [ligne 2 à ligne (MY-1)]; Vandenberg (1974b) donne la signification et décrit le mode d'utilisation des tableaux IX et IY,

(11) IX(J,2), (MY-2) valeurs entières représentant les éléments aux limites droites de toutes les lignes intérieures [ligne 2 à ligne (MY-1)],

(12) IY(I,1), (MX-2) valeurs entières représentant les éléments aux limites inférieures de toutes les colonnes intérieures [colonne 2 à colonne (MX-1)],

(13) IY(I,2), (MX-2) valeurs entières représentant les éléments aux limites supérieures de toutes les colonnes intérieures [colonne 2 à colonne (MX-1)],

(14) DDXX(I), MX dimensions de l'élément suivant la direction des x,

(15) DDYY(I), MY dimensions de l'élément suivant la direction des y.

Dernière carte : Structure non imposée, 5 valeurs.

DT = valeur initiale de l'intervalle de temps
TMX = durée totale de la simulation
TINC = facteur par lequel on multiplie DT à chaque intervalle de temps; habituellement compris entre 1.00 et 1.25
COMP = précision du résultat dans le sous-programme itératif pour le calcul de l'épaisseur saturée. Lorsqu'en tous les points du tableau la différence entre la nouvelle et la dernière valeurs calculées de H est inférieure à COMP, on cesse l'itération. Le nombre maximal de boucles d'itération effectuées est arbitrairement fixé à 40, même si la précision requise n'est pas atteinte.
ICD = si ICD≠0, les valeurs de H sont imprimées après l'exécution de chaque boucle d'itération.

Le programme est conçu pour revenir à l'instruction (ligne 15 du listage) de lecture de la dernière carte chaque fois que le temps total atteint la valeur donnée à TMX. Autrement dit, on peut répéter la dernière carte un certain nombre de fois et fixer à chaque fois de nouvelles valeurs de DT, TMX, TINC, COMP, et ICD. De plus, cette instruction READ est suivie d'une instruction qui appelle le sous-programme INP2. Si on place une instruction de la forme

```
Q(25,25) = Q(25,25) + 0.001
```

entre les lignes 5 et 6 du sous-programme INP2 donné en annexe, on peut obtenir automatiquement les modifications des données originales en plaçant plusieurs fois la dernière carte dans le jeu. Une instruction de la forme

```
READ*, Q(25,25), Q(10,10)
```

pourrait aussi être insérée; il faudrait alors ajouter après chaque <<dernière carte>> une carte de données supplémentaires contenant les deux nouvelles valeurs de Q.

Pour mettre fin à l'exécution, il faut placer à la fin du jeu une carte dont la valeur du premier champ (valeur de DT) est nulle et dont les 4 autres valeurs (TMX, TINC, COMP, ICD) sont arbitraires. Etant donné qu'on utilise un format d'entrée à structure non imposée, dirigé par liste, la carte en question pourrait par exemple contenir tout simplement 5*0.

COMPARAISON DES RESULTATS DU MODELE ET DE LA SOLUTION ANALYTIQUE; EXEMPLE DE PREPARATION DES CARTES DE DONNEES

Il est possible de faire une comparaison avec les solutions analytiques dans certains cas particuliers :

(1) Lorsque la résistance, R, est très élevée, les deux solutions sont indépendantes et le rabattement dans

l'aquifère captif dû au pompage d'un puits au centre obéit à l'équation de Theis (De Wiest, 1965)

$$s = h(t=o) - h(t) = Q/(4\pi T) \int_{r^2S_2/(4Tt)}^{\infty} \exp(-u)/u \, du$$

(2) Lorsque S_1 est très élevé, la fuite à partir de l'aquifère à nappe libre vers l'aquifère captif ne fait pas varier l'élévation de la surface libre et le rabattement dû au pompage d'un puits à partir du centre du modèle obéit à l'équation de Hantush pour les aquifères semi-captifs (De Wiest, 1965)

$$s = Q/(4\pi T) \int_{r^2S_2/(4Tt)}^{\infty} \exp\{(-u-r^2/(4B^2u)\}/u \, du$$

où $B = (TD/K_v)^{1/2} = (TR)^{1/2} = (T/C)^{1/2}$

(3) Lorsqu'on donne à l'épaisseur saturée initiale de l'aquifère à nappe libre une valeur élevée par rapport au rabattement prévu, cet aquifère se comporte comme s'il était captif. Hantush (1967) donne une solution analytique pour ce cas, mais la solution générale est peu pratique. Cependant, lorsque les diffusivités des deux aquifères sont égales, c.-à-d.

$$T/S_2 = KH/S_1 \qquad (3)$$

on peut trouver une solution.

Dans ce cas, les équations 1 et 2 peuvent s'écrire

$$T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) + (H-h)C = S_2 \, \partial h/\partial t \qquad (4)$$

$$T_1\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) - (H-h)C = S_1 \, dH/\partial t \qquad (5)$$

où $T_1 = KH$,

et les conditions aux limites

$$H(r,0) = h(r,0) = 0 \qquad (6)$$

$$H(\infty,t) = H(\infty,t) = 0 \qquad (7)$$

$$\lim_{r \to o} \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right) = Q/(2\pi T) \qquad (8)$$

$$\lim_{r \to o} \left(r \frac{\partial H}{\partial r}\right) = 0 \qquad (9)$$

En additionnant (4) et (5) et en définissant une nouvelle variable

$$U = h + (T_1/T)H$$

nous obtenons

$$\partial^2 U/\partial r^2 + (1/r)\ \partial U/\partial r = (S_2/T)\ \partial U/\partial t \qquad (10)$$

et les conditions aux limites

$$U(r,0) = U(\infty,t) = 0 \qquad (11)$$

$$\lim_{r \to o} (r\ \partial U/\partial r) = Q/(2\pi T) \qquad (12)$$

La solution du problème des valeurs aux limites (équations 10, 11 et 12) est

$$U = h + (T_1/T)H = -Q/(4\pi T)\ W\{r^2 S_2/(4Tt)\} \qquad (13)$$

où $W(x) = \int_x^\infty \exp(-u)/u\ du$

En multipliant (4) par T_1 et (5) par T puis en soustrayant nous obtenons

$$\partial^2 V/\partial r^2 + (1/r)\ \partial V/\partial r - (T_1+T)C/(TT_1)V = (S_2/T)\ \partial V/\partial T \qquad (14)$$

où $V = h - H$

et les conditions

$$V(r,0) = V(\infty,t) = 0 \qquad (15)$$

$$\lim_{r \to o} (r\ \partial V/\partial r) = Q/(2\pi T) \qquad (16)$$

L'équation 14 a la même forme que l'équation différentielle pour les aquifères semi-captifs; par conséquent, la solution des équations 14, 15 et 16 est

$$V = h - H = -Q/(4\pi T) \int_{r^2 S_2/4Tt}^\infty \exp(-u - r^2/4B'^2 u)/u\ du \qquad (17)$$

où

$$B' = \{(T/C)T_1/(T_1+T)\}^{1/2}$$

et l'intégrale s'écrit habituellement sous la forme W(u,r/B'), qui est la fonction de Hantush pour un aquifère semi-captif.

En combinant les équations 13 et 17, nous obtenons finalement

$$h = -Q/\{4\pi(T+T_1)\}\{W(u)+(T_1/T)W(u,r/B')\} \quad (18)$$

$$H = -Q/\{4\pi(T+T_1)\}\{W(u) - W(u,r/B')\} \quad (19)$$

Afin de simuler les résultats de (18) et (19), on a passé un programme d'essai en utilisant les paramètres suivants :

MX = MY = 50
DX = DY = 100 m
H = HH = 100 m
K = 0.2 m^2/jour, donc KH = T_1 = 20 m^2/jour
T = 10 m^2/jour
S_1 = 0.02
S_2 = 0.01
Q = 0
QQ(25,25) = 0.01 m/jour, correspondant à un débit sortant ponctuel de 100 m^3/jour
R = 1/C = 2667 jours

On obtient

$$Q/\{4\pi(T+T_1)\} = 0.265$$

$$u = 0.00025\ r^2/t$$

$$B' = 133.33$$

Donc, pour un noeud situé à une distance r du puits de pompage, le rabattement, s_w, de l'aquifère à nappe libre et le rabattement, s_c, de l'aquifère captif sont respectivement :

$$s_w = 0.265\ \{W(0.00025\ r^2/t) - W(0.00025\ r^2/t,\ 0.0075\ r)\}$$

$$s_c = 0.265\ \{W(0.00025\ r^2/t) + 2W(0.00025\ r^2/t,\ 0.0075r)\}$$

Le tableau 1 donne certains des résultats de l'essai effectué avec une valeur initiale de DT = 0.001 jour et un facteur d'accroissement de 1.2 à chaque intervalle de temps jusqu'à un temps maximal de 500 jours en 64 intervalles.

La figure 2 montre les 7 cartes de données requises pour passer le programme. On se sert de l'option de répétition de l'instruction READ à structure non imposée en FORTRAN V étendu pour entrer, par exemple, les 2500 valeurs de 100 pour la matrice H sous la forme 2500*100.

Tableau 1. Comparaison des résultats du modèle et de la solution analytique

Temps (jours)	Rabattement de l'aquifère à nappe libre (m) Modèle	Sol anal.	Erreur abs.	Erreur rel. %	Rabattement de l'aquifère captif (m) Modèle	Sol. anal.	Erreur abs.	Erreur rel. %
	r = 200; r/B' = 1.5; u = 10/t							
10.6	0.019	0.020	-0.001	5.0	0.169	0.150	0.019	12.7
22	0.075	0.079	-0.004	5.0	0.353	0.332	0.021	6.3
38	0.156	0.161	-0.005	3.1	0.500	0.475	0.025	5.3
79	0.309	0.313	-0.004	1.3	0.684	0.652	0.032	4.9
136	0.442	0.444	-0.002	0.5	0.821	0.784	0.037	4.7
272	0.627	0.628	-0.001	0.2	1.007	0.967	0.039	4.1
487	0.768	0.769	-0.001	0.1	1.150	1.109	0.041	3.7
	r = 400; r/B' = 3; u = 40/t							
22	0.010	0.010	0	0	0.035	0.030	0.005	16.7
38	0.036	0.039	-0.003	7.7	0.086	0.080	0.006	7.5
79	0.122	0.124	-0.005	3.9	0.191	0.182	0.009	4.9
136	0.218	0.225	-0.007	3.1	0.293	0.280	0.013	4.6
282	0.375	0.382	-0.007	1.8	0.454	0.437	0.017	3.9
487	0.505	0.512	-0.007	1.4	0.585	0.567	0.018	3.2
	r = 600; r/B' = 4.5; u = 90/t							
38	0.006	0.006	0	0	0.013	0.011	0.002	18.8
79	0.040	0.043	-0.003	7.0	0.056	0.052	0.004	7.1
136	0.098	0.103	-0.005	4.9	0.120	0.113	0.007	6.2
282	0.217	0.224	-0.007	3.1	0.245	0.234	0.011	4.7
487	0.329	0.338	-0.009	2.7	0.360	0.348	0.012	3.4

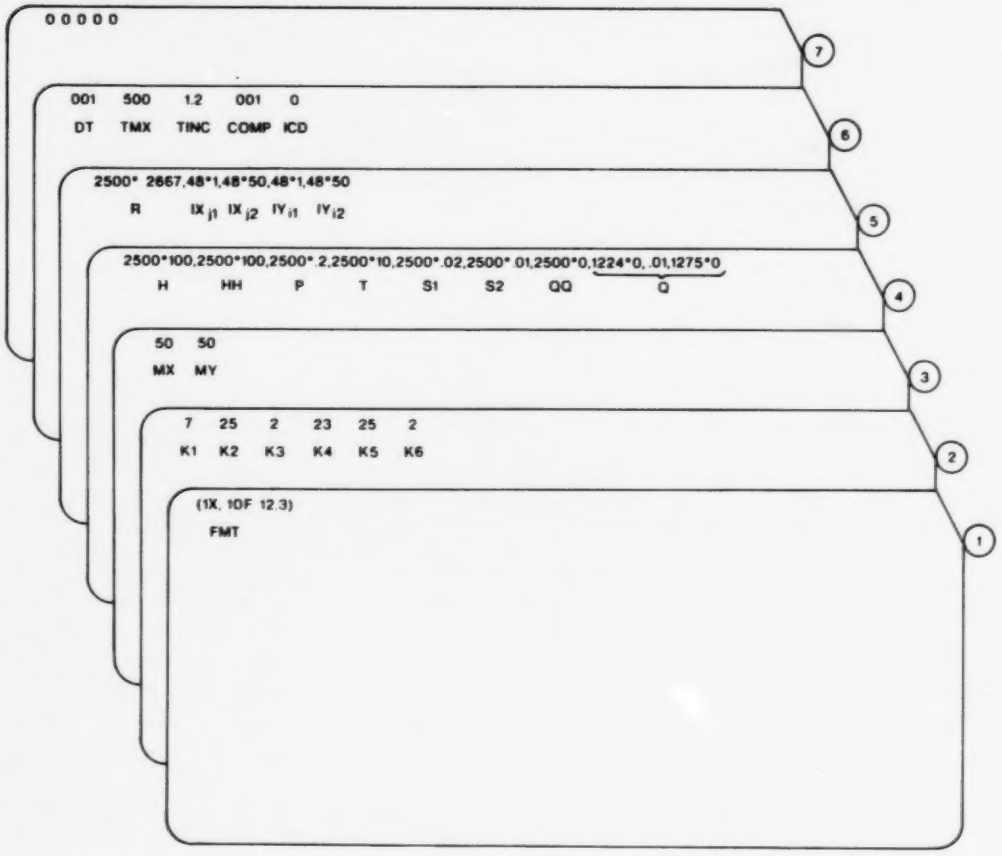

Figure 2. Cartes de données requises pour passer le programme d'essai.

ALIMENTATION EN EAU DE PLUIE D'UN AQUIFERE A NAPPE LIBRE

L'exemple précédent a servi à vérifier la partie du modèle portant sur le transfert de l'eau souterraine entre deux aquifères à travers une couche semi-perméable capacitive. Dans la présente section, on décrit certains résultats des simulations de l'aquifère à nappe libre lorsque l'alimentation en eau de pluie est le principal apport à l'aquifère.

On étudie d'abord en détail les solutions analytiques pour un aquifère homogène linéaire afin de comprendre les propriétés et le comportement de la fonction H(x,t), à laquelle on compare ensuite les solutions du modèle.

Il serait bon de rappeler que les hypothèses fondamentales des modèles numériques et analytiques sont les hypothèses de

Dupuit-Forchheimer, dans lesquelles on considère que H ne varie pas avec la profondeur. Il ne faudrait donc pas oublier dans toutes les applications la nature approximative des résultats du modèle.

En supposant qu'on peut décrire le processus de façon plus ou moins satisfaisante en termes d'écoulement horizontal, on peut exprimer l'infiltration d'eau de pluie régulière dans un aquifère à nappe libre par l'équation différentielle

$$(\partial/\partial x)(H\ \partial H/\partial x) + q_2/K = (S_1/K)\ \partial H/\partial t \qquad (20)$$

La figure 3 représente un modèle type avec les conditions aux limites

$$H(x=0,t) = H(x=L,t) = H(x,t=0) = H_o \qquad (21)$$

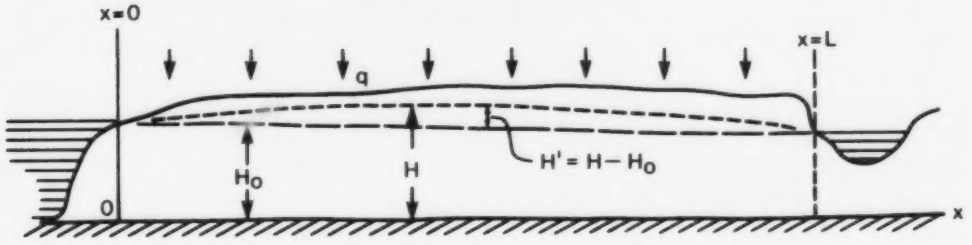

Figure 3. Schéma d'un aquifère à nappe libre en condition d'alimentation uniforme constante.

Solution en régime permanent

Dans les conditions d'alimentation en régime permanent, la surface libre s'élève et il se crée en même temps un gradient à la surface libre qui provoque l'écoulement vers l'extérieur aux limites. Le gradient augmente avec l'élévation de la surface libre et un équilibre de régime permanent, caractérisé par une alimentation équilibrée exactement par l'écoulement latéral vers l'extérieur, est finalement atteint.

Le régime permanent est décrit complètement par l'équation différentielle:

$$(\partial/\partial x)\ (H\ \partial H/\partial x) + q_2/K = 0 \qquad (22)$$

et les conditions aux limites

$$H(0) = H(L) = H_o \qquad (23)$$

La solution des équations 22 et 23 est

$$H^2 - H_o^2 = q_2 x(L-x)/K$$

Solution approximative en régime transitoire

On ne peut pas résoudre l'équation 20 analytiquement. Cependant, lorsque l'aquifère est épais, la variation de la hauteur, H, de la section transversale à travers laquelle se produit l'écoulement est relativement faible, et dans l'expression

$$(\partial/\partial x)\ (H\ \partial H/\partial x) = H\ \partial^2 H/\partial x^2 + (\partial H/\partial x)^2$$

nous pouvons laisser tomber le second terme et écrire

$$\partial^2 H/\partial x^2 + q_2/T = (S_1/T)\ \partial H/\partial t$$

où $T = KH$, la transmissivité.

De plus, si nous posons

$$H' = H - H_o$$

nous obtenons

$$\partial^2 H'/\partial x^2 + q_2/T = (S_1/T)\ \partial H'/\partial t \qquad (24)$$

avec les conditions aux limites

$$H'(x=0,t) = H'(x=L,t) = H'(x,t=0) = 0 \qquad (25)$$

On peut résoudre les équations 24 et 25 de la façon suivante. En prenant les transformées de Laplace de l'équation différentielle et les conditions initiales :

$$\partial^2 \bar{h}/\partial x + q_2/Tp = pS_1\bar{h}/T \qquad (26)$$

$$\bar{h}(0,p) = \bar{h}(L,p) = 0$$

où $h = \int_0^\infty e^{-pt} H'(t)\, dt$, est la transformée de Laplace de H'

et p = la variable de la transformée.

L'équation 26 a comme solution générale

$$\bar{h} = A(p)\ \exp\{x(S_1p/T)^{1/2}\} + B(p)\ \exp\{-x(S_1p/T)^{1/2}\} + q_2/(S_1p^2) \qquad (27)$$

D'après les conditions aux limites, nous obtenons

$$A = q_2/(S_1p^2)\,[\exp\{-L(S_1p/T)^{1/2}\} - 1]/[\exp\{L(S_1p/T)^{1/2}\} - \exp\{-L(S_1p/T)^{1/2}\}]$$

$$B = -q_2/(S_1p^2)\,[\exp\{L(S_1p/T)^{1/2}\} - 1]/[\exp\{L(S_1p/T)^{1/2}\} - \exp\{-L(S_1p/T)^{1/2}\}]$$

En substituant A et B dans l'équation 27, nous obtenons

$$\bar{h} = q_2/(S_1p^2)[1 - [\sinh\{(L-x)(S_1p/T)^{1/2}\} + \sinh\{x(S_1p/T)^{1/2}\}]/ \sinh\{L(S_1p/T^{1/2}\}] \quad (28)$$

La transformée inverse de l'équation 28 est

$$H' = -2q_2L^2/(\pi^3T) \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^n/n^3\}[1 - \exp\{-n^2\pi^2tT/(L^2S_1)\}] \cdot [\sin\{n\pi(L-x)/L\} + \sin(n\pi x/L)] \quad (29)$$

Mais étant donné que

$$\sin\{n\pi(L-x)/L\} = \sin(n\pi - n\pi x/L) = -\sin(n\pi x/L)\cos(n\pi)$$

l'équation 29 peut se réduire à

$$H' = 4q_2L^2/(\pi^3T) \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \exp\{-(2n-1)^2\pi^2tT/(L^2S_1)\}] \sin\{(2n-1)\pi x/L\}/(2n-1)^3 \quad (30)$$

Pour les faibles valeurs de t nous pouvons écrire

$$1 - \exp\{-(2n-1)^2\pi^2tT/(L^2S_1)\} \approx (2n-1)^2\pi^2tT/(L^2S_1)$$

et

$$H' \text{ (petit t)} \approx 4q_2t/(\pi S_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\{(2n-1)\pi x/L\}/(2n-1) \quad (31)$$

La série dans l'équation 31 est connue et sa valeur est $\pi/4$,

donc

$$H' \text{ (petit t)} = q_2t/S_1$$

comme on peut le dériver directement à partir des hypothèses fondamentales. Pour les valeurs petites de t, le gradient de la surface libre et le débit sortant sont négligeables et la montée de la surface libre par unité de temps est égale au rapport de la vitesse d'infiltration au coefficient d'emmagasinement et est indépendante de x.

Pour les valeurs élevées de t, le terme exponentiel de l'équation 30 tend vers zéro :

$$H'(t \to \infty) = 4q_2L^2/(\pi^3T) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\{(2n-1)\pi x/L)\}/(2n-1)^3$$

On peut montrer que cette série tend vers la limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\{(2n-1)\pi x/L\}/(2n-1)^3 = \pi^3 x\ (L-x)/(8L^2)$$

et

$$H'(t \to \infty) = q_2\ x\ (L-x)/(2T) \qquad (32)$$

On peut aussi dériver l'équation 32 de l'équation 24 dans sa forme applicable à un régime permanent :

$$\partial^2 H'/\partial x^2 + q_2/T = 0$$

en tenant compte des conditions aux limites données en (25).

Pour $x = L/2$, le point le plus élevé de la surface libre,

$$H'(t \to \infty,\ x = L/2) = 4q_2L^2/(\pi^3T)[1 - 1/3^3 + 1/5^3 - \ldots]$$

La série infinie converge vers $\pi^3/32$, ce qui donne

$$H'(t \to \infty,\ x = L/2) = q_2L^2/(8T)$$

Ce résultat peut aussi être obtenu directement de l'équation 32.

Temps requis pour atteindre le régime permanent

Le système tend de façon asymptotique vers le régime permanent lorsque $t \to \infty$. Il est donc impossible, à proprement parler, de dire que le régime permanent est atteint à un moment donné. Cependant, il est commode de pouvoir estimer le moment, t_s, auquel H' atteint, par exemple, 99 % de sa valeur en régime permanent :

$$H'(t) > 0.99\ H'(\infty) \qquad (33)$$

L'étude de l'équation 30 montre que le facteur exponentiel du premier terme de la série infinie permet d'obtenir une bonne estimation. Lorsque

$$\exp\{-\pi^2 t_s T/(L^2 S_1)\} < 0.01$$

on satisfait à peu de choses près à l'équation 33. Ainsi

$$t_s = -L^2 S_1/(\pi^2 T)\ \ln 0.01$$

ou

$$t_s = 0.47\ L^2 S_1/T \qquad (34)$$

Solution numérique contre solution analytique

On a décrit un programme informatique pour trouver la solution analytique (30) et on s'en est servi pour calculer les élévations de la surface libre dans les conditions suivantes:

$L = 4000$ m
$K = 50$ m/jour
$H_o = 100$ m
$S_1 = 0.01$
$q_2 = 0.001$ m/jour

On a simulé les mêmes conditions à l'aide du programme DUBBLE. Etant donné que ce dernier résout l'équation 20 au lieu de l'équation 24, on a choisi comme épaisseur de l'aquifère une valeur relativement élevée par rapport à la valeur maximale de $H' = 0.4$ m. La concordance des deux solutions était très bonne; la différence ne dépassait pas 1 mm, soit une erreur relative d'environ 0.2. La figure 4 montre les élévations de la surface libre à divers moments.

Afin de montrer la différence entre la solution analytique (30) et la solution numérique (20), on a aussi utilisé le modèle numérique pour simuler l'écoulement de l'eau souterraine dans des aquifères plus minces (H_o = 10, 5, 2 et 1 m) où l'effet de la transmissivité variable est plus évident. Pour les différentes valeurs de H_o, on a utilisé différentes valeurs de la perméabilité, de sorte que le produit $K\ H_o$ est resté constant. On a aussi gardé tous les autres paramètres constants. La figure 5 montre les résultats en régime permanent. Le moment auquel H' atteint 99 % de sa valeur en régime permanent, calculée à partir de l'équation 34, est

$$t_s = (0.47)(4000)^2(10^{-2})/5000 = 15 \text{ jours}$$

La valeur la plus près de t_s dans les simulations était de 15.5 jours. Le tableau 2 donne les rapports $H'(t_s)/H'(\infty)$ à ce temps, pour les cinq simulations, H_o = 1, 2, 5, 10 et 100 m, pour le noeud le plus près de la limite ($x/L = 0.05$) et pour le noeud du centre ($x/L = 0.5$).

Tableau 2. Rapports $H'(t = 15.5)/H'(t \to \infty)$ pour les cinq essais du modèle, $t_s = 15$ jours.

H_o(m) →	100	10	5	2	1
x/L = 0.05	0.993	0.995	0.996	0.995	0.997
x/L = 0.50	0.992	0.993	0.994	0.993	0.998

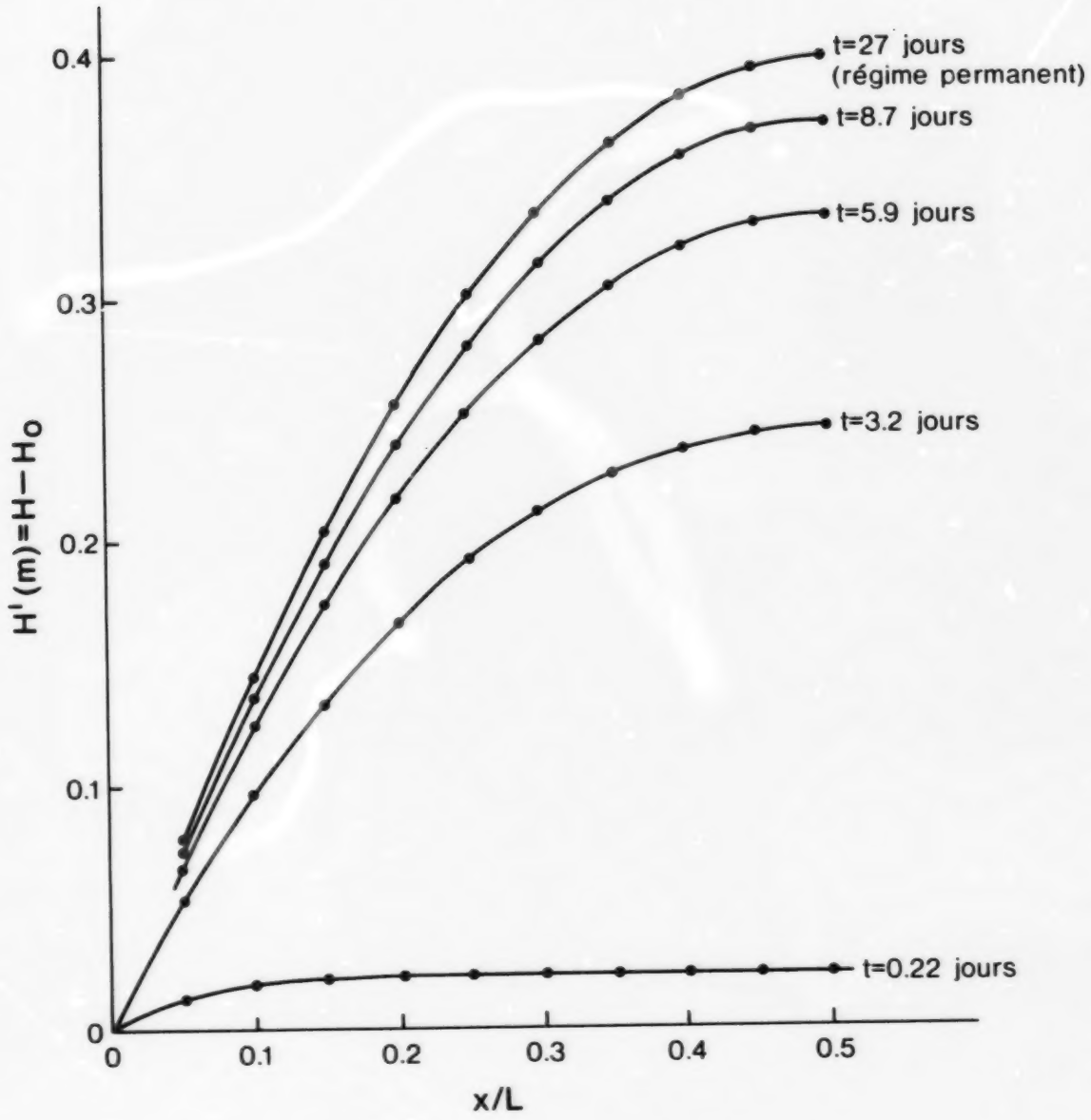

Figure 4. Profils de la surface libre variant avec le temps, en condition d'alimentation uniforme constante.

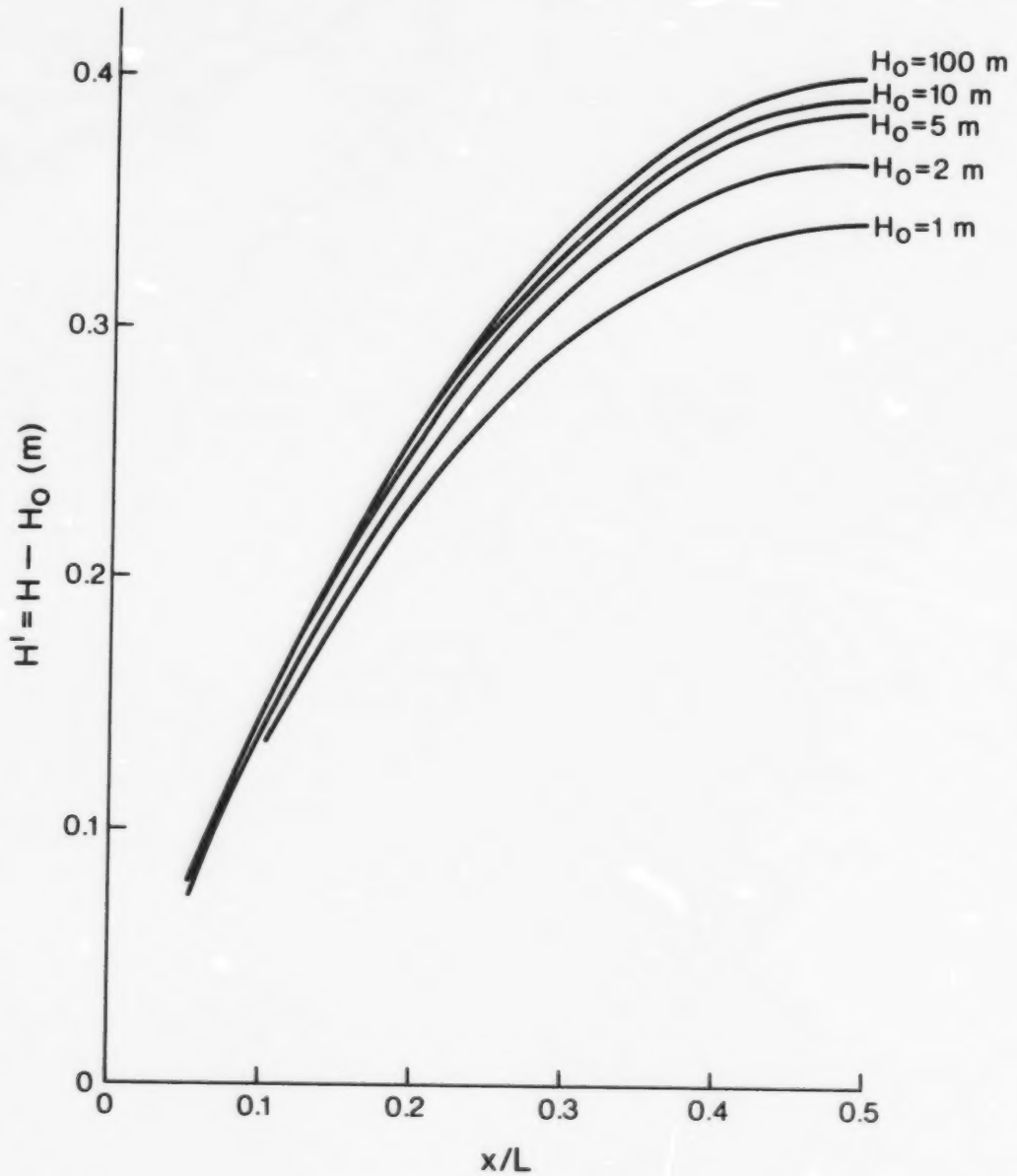

Figure 5. Variation du profil de la surface libre en régime permanent en fonction de l'épaisseur de l'aquifère.

REFERENCES

De Wiest, R.J.M. 1965. *Geohydrology*. New York: J. Wiley and Sons.

Hantush, M.S. 1967. Flow to wells in aquifers separated by a semipervious layer. Eos. Trans. Am. Geophys. Union, 36(1): 95-100.

Vandenberg, A. 1974a. A digital simulation of horizontal salt-water encroachment induced by fresh-water pumping. Etude n° 41, Série scientifique, Direction générale des eaux intérieures, Ottawa.

Vandenberg, A. 1974b. Program SOPH: Simulation of time-variant piezometric surface in a confined aquifer subjected to pumping. Publication hors série, Direction générale des eaux intérieures, Ottawa.

Vandenberg, A. 1976. Program ESOPH - Extended SOPH, Simulation of time-variant piezometric surface in a confined, leaky aquifer subjected to pumping. Publication hors série, Direction générale des eaux intérieures, Ottawa.

Annexe

Listage de programme

```
PROGRAM DUBPEL     73/74   OPT=1                    FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

      PROGRAM DUBPEL(INPUT,OUTPUT)
      COMMON P(50,50),H(50,50),HH(50,50),HS(50,50),HO(50,50),HR(50,50)
      COMMON S1(50,50),S2(50,50),CO(50,50),R(50,50),A(150),D(50)
      COMMON T(50,50),O(50,50),IX(50,2),IY(50,2)
      COMMON MX,MY,MX1,MY1,DDXX(50),DDYY(50)
      COMMON K1,K2,K3,K4,K5,K6,FMT(7),ITER,TM
      READ 500,FMT
  500 FORMAT(3A10)
      READ*,K1,K2,K3,K4,K5,K6
      READ*,MX,MY $ MX1=MX-1 $ MY1=MY-1
      CALL INPUTT $ DO 13 I=1,MX $ DO 13 J=1,MY
   13 HS(I,J)=H(I,J) $ TM=0.
   66 READ*,DT,TMX,TINC,COMP,ICO $ IF(DT.LE.0.)STOP
      CALL INP2 $ TM=DT+TM
   22 ITER = 0
   12 DO 14 I=1,MX $ DO 14 J=1,MY
   14 HO(I,J)=(H(I,J)+HS(I,J))*.5 $ ITER=ITER+1
      DO 31 I=1,MX1 $DO 31 J=1,MY1 $IF(HO(I,J).GE.0.)GOTO 31
      HO(I,J)=0. $ PRINT *,I,J
   31 CONTINUE
      DO 3 J=2,MY1 $ IBE=IX(J,1)+1 $ IEN=IX(J,2)-1 $ ICNT=0
       DO 10 I=IBE,IEN $ KK=ICNT*3+1 $ ICNT=ICNT+1
      AT=P(I,J)*HO(I,J) $ A1=P(I-1,J)*HO(I-1,J)
      A2=P(I+1,J)*HO(I+1,J) $ A3=P(I,J-1)*HO(I,J-1)
      A4=P(I,J+1)*HO(I,J+1)
      A1=SQRT(AT*A1)/(DDXX(I)*(DDXX(I)+DDXX(I-1)))*2.
      A2=SQRT(AT*A2)/(DDXX(I)*(DDXX(I)+DDXX(I+1)))*2.
      A3=SQRT(AT*A3)/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J-1)))*2.
      A4=SQRT(AT*A4)/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J+1)))*2.
      A(KK)=-A1-A2-2.*S1(I,J)/DT-1./R(I,J)
      D(ICNT)=A1*(H(I,J)-H(I-1,J))+A2*(H(I,J)-H(I+1,J))+2.*A3*
     1(H(I,J)-H(I,J-1))+2.*A4*(H(I,J)-H(I,J+1))-2.*DO(I,J)
     2-H(I,J)*(2.*S1(I,J)/DT-1./R(I,J))-2.*HH(I,J)/R(I,J)
      IF(I.EQ.IBE)D(ICNT)=D(ICNT)-A1*H(I-1,J)$IF(I.NE.IBE)A(KK-1)=A1
      IF(I.EQ.IEN)D(ICNT)=D(ICNT)-A2*H(I+1,J)$IF(I.NE.IEN)A(KK+1)=A2
   10 CONTINUE $ CALL MAS808(0,A,ICNT,1,1,1,1,E-4,IER) $ ICNT=0
      DO 11 I=IBE,IEN $ ICNT=ICNT+1
   11 HR(I,J)=D(ICNT)
    3 CONTINUE $ DO 4 I=2,MX1 $ IBE=IY(I,1)+1 $ IEN=IY(I,2)-1$ICNT=0
      DO 5 J=IBE,IEN $ KK=ICNT*3+1 $ ICNT=ICNT+1
      AT=P(I,J)*HO(I,J) $ A1=P(I-1,J)*HO(I-1,J)
      A2=P(I+1,J)*HO(I+1,J) $ A3=P(I,J-1)*HO(I,J-1)
      A4=P(I,J+1)*HO(I,J+1)
      A2=SQRT(AT*A2)/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J-1)))*2.
      A4=SQRT(AT*A4)/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J+1)))*2.
      A(KK)=-A3-A4-2.*S1(I,J)/DT-1./R(I,J)
      D(ICNT)=A3*(H(I,J-1)-H(I,J))+A4*(H(I,J+1)-H(I,J))-HR(I,J)*
     1(2.*S1(I,J)/DT+1./R(I,J))
      IF(J.EQ.IBE)D(ICNT)=D(ICNT)-A3*H(I,J-1) $IF(J.NE.IBE)A(KK-1)=A3
      IF(J.EQ.IEN)D(ICNT)=D(ICNT)-A4*H(I,J+1)$IF(J.NE.IEN)A(KK+1)=A4
    5 CONTINUE $ CALL MAS808(0,A,ICNT,1,1,1,1,E-4,IER)
      IF(ICO.NE.2)PRINT*,(D(J),J=1,ICNT),I,IER
      ICNT=0 $ DO 6 J=IBE,IEN      $ ICNT=ICNT+1
    6 HR(I,J)=D(ICNT)
    4 CONTINUE  $ DO 7 I=2,MX1  $ DO 7 J=2,MY1
      IF(ABS(HR(I,J)-HS(I,J)).GT.COMP)GOTO 8
    7 CONTINUE
```

```
      17    DO 15 J=2,MY1 $ DO 9 I=2,MX1
            HS(I,J)=HR(I,J)
   60     9 H(I,J)=HR(I,J)
      15    CONTINUE $ GOTO 23
     180 FORMAT(2X,F12.3,2I2)
     200   FORMAT(1X,8F12.4)
         8 DO 16 I=2,MX1 $ DO 16 J=2,MY1
   65   16 HS(I,J)=HR(I,J) $ IF(ITER.LT.40)GOTO 12 $ GOTO 17
        23 DO 24 J=2,MY1 $ IBE=IX(J,1)+1 $ IEN=IX(J,2)-1 $ ICNT=0
           DO 25 I=IBE,IEN $ KK=ICNT*3+1 $ ICNT=ICNT+1
           A3=SQRT(T(I,J)*T(I,J-1))/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J-1)))*2.
           A4=SQRT(T(I,J)*T(I,J+1))/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J+1)))*2.
   70      A1=SQRT(T(I,J)*T(I-1,J))/(DDXX(I)*(DDXX(I)+DDXX(I-1)))*2.
           A2=SQRT(T(I,J)*T(I+1,J))/(DDXX(I)*(DDXX(I)+DDXX(I+1)))*2.
           A(KK)=-A1-A2-2.*S2(I,J)/DT-1./R(I,J)
           D(ICNT)=A1*(HH(I,J)-HH(I-1,J))+A2*(HH(I,J)-HH(I+1,J))
          1+2.*(A3*(HH(I,J)-HH(I,J-1))+A4*(HH(I,J)-HH(I,J+1))+Q(I,J)
   75     2-H(I,J)/R(I,J))-HH(I,J)*(2.*S2(I,J)/DT-1./R(I,J))
           IF(I.EQ.IBE)D(ICNT)=D(ICNT)-A1*HH(I-1,J)$ IF(I.NE.IBE)A(KK-1)=A1
           IF(I.EQ.IEN)D(ICNT)=D(ICNT)-A2*HH(I+1,J )$ IF(I.NE.IEN)A(KK+1)=A2
        25 CONTINUE $ CALL MAS00B(D,A,ICNT,1,1,1,1,E-4,IER)
           ICNT=0 $ DO 26 I=IBE,IEN $ ICNT=ICNT+1
   80      26 HR(I,J)=D(ICNT)
           24 CONTINUE $ DO 27 I=2,MX1 $ IBE=IY(I,1)+1 $ IEN=IY(I,2)-1
           ICNT=0 $ DO 28 J=IBE,IEN $ KK=ICNT*3+1 $ ICNT=ICNT+1
           A3=SQRT(T(I,J)*T(I,J-1))/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J-1)))*2.
           A4=SQRT(T(I,J)*T(I,J+1))/(DDYY(J)*(DDYY(J)+DDYY(J+1)))*2.
   85      A(KK)=-A3-A4-2.*S2(I,J)/DT-1./R(I,J)
           D(ICNT)=A3*(HH(I,J-1)-HH(I,J))+A4*(HH(I,J+1)-HH(I,J))-HR(I,J)*
          1(2.*S2(I,J)/DT+1./R(I,J))
           IF(J.EQ.IBE)D(ICNT)=D(ICNT)-A3*HH(I,J-1)$ IF(J.NE.IBE)A(KK-1)=A3
           IF(J.EQ.IEN)D(ICNT)=D(ICNT)-A4*HH(I,J+1)*IF(J.NE.IEN)A(KK+1)=A4
   90      28 CONTINUE ! CALL MAS00B(D,A,ICNT,1,1,1,1,E-4,IER)
           ICNT=0 $ DO 29 J=IBE,IEN
           ICNT=ICNT+1
        29 HH(I,J)=D(ICNT)
      27    CONTINUE
   95      CALL REPORT $ DT=DT*TINC
           IF(TH.EQ.TMX)GOTO 66
           TH=TH+DT $ IF(TH.LT.TMX)GOTO 22 $ TH=TH-DT
           DT=TMX-TH $ TH=TMX $ GOTO 22 $ END
```

```
  SUBROUTINE INPUTT     73/74   OPT=1                    FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

1                 SUBROUTINE INPUTT
                  COMMON P(50,50),H(50,50),HH(50,50),HS(50,50),HQ(50,50),HR(50,50)
                  COMMON S1(50,50),S2(50,50),CC(50,50),R(50,50),A(150),D(50)
                  COMMON T(50,50),Q(50,50),IX(5),2),IY(50,2)
5                 COMMON MX,MY,MX1,MY1,DDXX(50),DDYY(50)
                  READ*,((H(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
                  READ*,((HH(I,J),I=1,MX),J=1,MY)$READ*,((P(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
                  READ*,((T(I,J),I=1,MX),J=1,MY)$READ*,((S1(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
                  READ*,((S2(I,J),I=1,MX),J=1,MY)$READ*,((QQ(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
10                READ*,((Q(I,J),I=1,MX),J=1,MY)$READ*,((R(I,J),I=1,MX),J=1,MY)
                  READ*,(IX(J,1),J=2,MY1) $ READ*,(IX(J,2),J=2,MY1)
                  READ*,(IY(I,1),I=2,MX1) $ READ*,(IY(I,2),I=2,MX1)
                  READ*,(DDXX(I),I=1,MX) $ READ*,(DDYY(I),I=1,MY)
                  RETURN $  END


  SUBROUTINE INP2       73/74   OPT=1                    FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

1                 SUBROUTINE INP2
                  COMMON P(50,50),H(50,50),HH(50,50),HS(50,50),HQ(50,50),HR(50,50)
                  COMMON S1(50,50),S2(50,50),CC(50,50),R(50,50),A(150),D(50)
                  COMMON T(50,50),C(50,50),IX(50,2),IY(50,2)
5                 COMMON MX,MY,MX1,MY1,DDXX(50),DDYY(50)
                  RETURN $ END


  SUBROUTINE REPORT     73/74   OPT=1                    FTN 4.8+528        09/07/81  08.34.45

1                 SUBROUTINE REPORT
                  COMMON P(50,50),H(50,50),HH(50,50),HS(50,50),HQ(50,50),HR(50,50)
                  COMMON S1(50,50),S2(50,50),CC(50,50),R(50,50),A(150),D(50)
                  COMMON T(50,50),C(50,50),IX(50,2),IY(50,2)
5                 COMMON MX,MY,MX1,MY1,DDXX(50),DDYY(50)
                  COMMON K1,K2,K3,K4,K5,K6,FMT(3),ITER,TM
                  PRINT 100,TM,ITER
            100   FORMAT(2X,E12.5,I5//)
                  PRINT FMT,((H(I,J),I=K1,K2,K3),J=K4,K5,K6)
10                PRINT 200
            200   FORMAT(/)
                  PRINT FMT,((HH(I,J),I=K1,K2,K3),J=K4,K5,K6)
                  RETURN  $ END
```